平成１５年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
数理工学専攻
入試資格者選考試験問題

基礎科目

試験日時　：　平成１４年８月２６日、午後１時００分より３時００分まで。

選択科目　：　基礎数学 I、アルゴリズム基礎、線形計画、線形制御理論、基礎力学、基礎数学 II

注意　：
（１）　上記科目から２科目選択すること。３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
（２）　解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
（３）　答案は問題毎に回収する。
問題用紙及び計算用紙は持ち帰ること。

基礎数学 I

$\boxed{1}$

[I] 実パラメータ x をもつ 実数 t の関数

$$f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{te^{xt}}{e^t - 1} & (t \neq 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases}$$

は $t = 0$ で微分可能であることを示せ．

[II] [I] の関数のテイラー展開

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

により x の多項式 $B_n(x)$ を導入する．以下の問いに答えよ．

(1) $B_0(0)$, $B_1(0)$, $B_2(0)$ を計算せよ．

(2) $B_{2n+1}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$ を証明せよ．

(3) 多項式 $B_n(x)$ は微分方程式

$$\frac{dB_n(x)}{dx} = nB_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を満たすことを示せ．

(4) $B_n(x+1) - B_n(x)$ を自然数 n と実数 x を用いて表せ．

(5) 任意の n について積分

$$I_n \equiv \int_0^1 B_n(x) dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を計算せよ．

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

それぞれ n 個の整数を要素とする 3 配列 A_1, A_2, A_3 がある。ただし、任意の 2 整数の大小および等号関係は、定数時間で判定可能であるとする。このとき、3 配列すべてに共通して存在する要素を全部列挙するアルゴリズムのうち、最悪時間量が $O(n \log n)$ であるものと、平均時間量が $O(n)$ であるものを与えよ。なお、アルゴリズムと共に、計算量がそのようになる事の説明も与えよ。

線形計画

$\boxed{3}$

問１

与えられた $m \times n$ 実行列 $\boldsymbol{A}$ と m 次元実ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，１次不等式系 $\boldsymbol{Ax} \geqq \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ の集合は空でないと仮定する．線形計画の双対定理を用いて，次の **(i)** と **(ii)** は等価であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{c}$ は n 次元実ベクトル，α は実数であり，$\boldsymbol{z}^T$ は $\boldsymbol{z}$ の転置を表す．

(i) $\boldsymbol{Ax} \geqq \boldsymbol{b}$ を満たす任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geqq \alpha$ が成り立つ．

(ii) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \geqq \alpha$ を満たす m 次元ベクトル $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$ が存在する．

問２

次のような実パラメータ θ を含む線形計画問題 $\mathrm{P}(\theta)$ を考える．

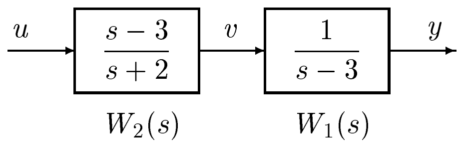
$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\theta): & \text{minimize} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{Ax} \geqq \boldsymbol{b} + \theta\boldsymbol{d} \end{array}$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{d}$ は m 次元定数ベクトルである．また，問題 $\mathrm{P}(\theta)$ は任意の実数 θ に対して最適解をもつものとし，目的関数 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ の最小値をパラメータ θ の関数とみなして $f(\theta)$ と表す．そのとき，$f(\theta)$ は凸関数となることを示せ．

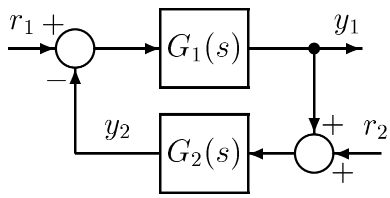
線形制御理論

$\boxed{4}$

1 下図のように伝達関数 $W_1(s) = 1/(s-3)$ を安定化する目的で，その前に $W_2(s) = (s-3)/(s+2)$ を直列に配置した．これによって，システムが安定化できたといえるかどうか，理由を付して答えよ．



2 下図のフィードバック制御系について以下の問に答えよ．



a) フィードバック制御系の (内部) 安定性の定義を述べよ．さらに，フィードバック制御系が安定となるための必要十分条件を $G_1(s)$, $G_2(s)$ を用いて述べよ．(証明不要)

b) 有理伝達関数 $G_1(s)$, $G_2(s)$ の既約分数表現を

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

とおく．このとき，

$$\Delta(s) := D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)$$

がフルビッツ多項式であれば，フィードバック系は安定となることを証明せよ．

c) 伝達関数は次式で与えられるとする．

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \frac{1}{s^2(s+2)}, \qquad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{K(s+0.5)}{s+3} \tag{a}$$

パラメータ K が変化するとする．フィードバック系が安定となるための K のとり得る範囲をラウス・フルビッツの方法を用いて求めよ．

d) 式 (a) の $G_1(s)$, $G_2(s)$ に対して，$D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) = 0$ の根軌跡を描け．ただし，$0 \leq K < \infty$ とする．

略 解

1.　2 つの伝達関数 $G_1(s) = (s-3)/(s+2)$, $G_2(s) = 1/(s-3)$ を直列に結合すると, システムの伝達関数は $T(s) = 1/(s+2)$ となる. しかし消去された因子 $s-3$ は不安定であるために, これを影の不安定モードという. 影の不安定モードが存在する場合には, システムが見かけ上は安定であってもシステムの出力は発散する. ただし, 影のモードが安定なものであれば, このような問題は生じない.

伝達関数 $G_1(s)$, $G_2(s)$ の初期値を考慮して, 微分方程式で表すと, 以下のようになる.

$$\dot{x} = -2x - 5u, \quad v = x + u, \quad x(0) = x_0$$
$$\dot{y} = 3y + v, \quad y(0) = y_0$$

上式をラプラス変換すると,

$$sx(s) - x_0 = -2x(s) - 5u(s), \quad sy(s) - y_0 = 3y(s) + x(s) + u(s)$$

となるので, $x(s)$ を消去すると次式を得る.

$$y(s) = \frac{y_0}{s-3} + \frac{x_0}{(s-3)(s+2)} + \frac{1}{s+2}u(s)$$

これを逆変換すると,

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{x_0}{5}\right)e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

となる. よって, $y_0 + x_0/5 = 0$ でない限り, 出力 $y(t)$ は発散する.

2-a) フィードバック系の安定性は, $r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ を入力, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ を出力とする 2 入力 2 出力系の入出力安定として定義する. すなわち, システムの入出力関係を

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

と表すとき, 任意の有界入力 $r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ に対して, 出力 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ が有界となることである.

そのための必要十分条件は 4 つの伝達関数 $H_{11}(s),\ H_{12}(s),\ H_{21}(s),\ H_{22}(s)$ がすべて安定となることである. これは, 2 つの伝達関数 $H_{11}(s),\ H_{22}(s)$ が安定となることと等価である.

2-b) H_{11}, H_{22} を計算すると, つぎのようになる.

$$H_{11}(s) = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}, \quad H_{22}(s) = \frac{N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

α) これらの伝達関数が極零点消去が存在しないとする. $\Delta(s)$ がフルビッツであれば, $H_{11}(s)$, $H_{22}(s)$ が安定となるので, フィードバック系は安定となる.

β) $N_1(s)$ と $D_2(s)$ あるいは $N_2(s)$, $D_1(s)$ の間に極零点消去が存在しても, H_{11}, H_{22} の極は $\Delta(s) = 0$ の根であるから, $\Delta(s)$ がフルビッツであれば, $H_{11}(s)$, $H_{22}(s)$ は安定となる.

2-c) 特性多項式は $A(s) = s^4 + 5s^3 + 6s^2 + Ks + K/2$ となる. よってラウス表は以下のように与えられる.

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 6 & K/2 \\ s^3 & 5 & K & \\ s^2 & 6 - K/5 & K/2 & \\ s^1 & K - \dfrac{25K/2}{6 - K/5} & & \\ s^0 & K/2 & & \end{array}$$

これより, 安定条件は

$$6 - K/5 > 0, \quad K - \frac{25K/2}{6 - K/5} > 0, \quad K/2 > 0$$

となる. これを整理すると, 安定条件として $0 < K < 35/2$ を得る.

2-d) 根軌跡

$$G(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+3)} = \frac{K(s+0.5)}{s^4+5s^3+6s^2}$$

1. $\nu = 3$
2. 極 ： $s = 0,\ 0,\ -2,\ -3;$ 零点 ： $s = -1/2,\ \infty,\ \infty\ \infty$
3. 実軸上の区間 $(-\infty,\ -3]$, $[-2,\ -1/2)$ は根軌跡の一部である
4. $s_g = -(a_1 - b_1)/\nu = -(5-1)/3 = -4/3$
   漸近線は点 $(-4/3,\ j0)$ を通過する傾き $\pm 60^\circ$ の直線となる.
5. 安定条件 $0 < K < 35/2$ より, $K = 0$, $K = 35/2$ のとき, 根軌跡は虚軸上にある.
   $K = 35/2$ のとき, 特性多項式は次のように因数分解できる.

$$\begin{aligned} s^4 + 5s^3 + 6s^2 + (35/2)s + 35/4 = s^4 + 6s^2 + 35/4 + 5s(s^2+7/2) \\ =&(s^2+7/2)(s^2+5/2) + 5s(s^2+7/2) \\ =&(s^2+7/2)(s^2+5s+5/2) = 0 \end{aligned}$$

よって, 点 $s = \pm\sqrt{7/2}j \simeq \pm 2.78j$ において根軌跡は虚軸を横切る.

基礎力学

$\boxed{5}$

細長い棒を考える。図１に示すように，棒の一端を原点 O とし，z 軸の正の方向を鉛直上方と定める。z 軸と棒は角度 α をなし，棒は z 軸の回りに角速度 ω で回転しているものとする。この棒にそって滑らかに動くことができる質量 m の質点 P の運動を調べる。α と ω は定数とし，原点から質点 P までの距離を r，重力加速度の大きさを g として次の問いに答えよ。(ただし，質点は原点 O に達するとそこで停止してしまうものとする。)

(1) 遠心力と重力の棒方向の成分の釣り合いから質点の平衡点の位置 $r = r_0$ を求め，平衡点の安定性を調べよ。

(2) r に関する運動方程式を書き下し，初期条件 $r = a$ (ここで a は正の定数)，$\frac{dr}{dt} = 0$ に対して運動方程式を解け。$a > r_0$ のときと $a < r_0$ のときの質点の運動を違いを述べよ。

(3) (1)，(2) でコリオリの力を考慮する必要がない理由を述べよ。

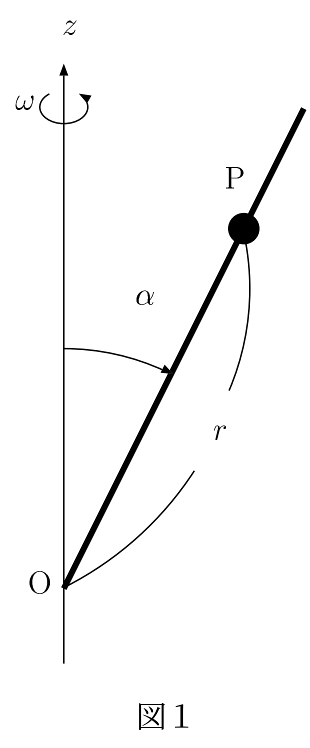


図１

基礎数学 II

$\boxed{6}$

A を $m \times n$ 複素行列とする。A は $\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^m$ への線形写像を与える。A^* で A のエルミート共役行列を表す。つまり、$A^* = \overline{A}^T$.　ここに、$\overline{A}$ は A の複素共役行列、$\overline{A}^T$ は $\overline{A}$ の転置行列である。明らかに、A^* は $\mathbf{C}^m$ から $\mathbf{C}^n$ への線形写像となる。$\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}^m$ にはそれぞれ標準的な内積 $\langle\ ,\ \rangle_n, \langle\ ,\ \rangle_m$ が定義されているとする。たとえば、$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k v_k$. ただし、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{C}^n$ の標準基底に関する成分をそれぞれ u_k, v_k で表した。以下の事実を証明せよ。

(1) $\langle A^*\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_n = \langle \boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x} \rangle_m, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^m,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$

(2) $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$

(3) $\operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^* = \mathbf{C}^m$

(4) $\operatorname{Im} A^* \oplus \operatorname{Ker} A = \mathbf{C}^n$

(5) $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \operatorname{Im} A^*$

(6) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AA^*$

ただし、$\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A$ 等はそれぞれ、

$$\operatorname{Im} A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n\}, \qquad \operatorname{Ker} A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = 0\}$$

で定義される。また、部分ベクトル空間 V に対して $V^\perp$ は V の直交補空間を表し、$\oplus$ は直和記号である。

平成１５年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
数理工学専攻
入試資格者選考試験問題

専門科目

試験日時　：　平成１４年８月２６日、午後３時１５分より５時１５分まで。

選択科目　：　応用数学、グラフ理論、オペレーションズリサーチ、現代制御理論、
物理統計学、力学系数学

注意　：　（１）　上記科目から２科目選択すること。３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
（２）　解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
（３）　答案は問題毎に回収する。
問題用紙及び計算用紙は持ち帰ること。

応用数学

$\boxed{1}$

複素数平面の原点を中心とする半径 R の開円板 B において正則で境界も含めて連続な関数 $f(z)$ を考える. 複素関数 f の実部を u とする. 以下の問に答えよ.

(1) $f(z)$ の実部 $u(re^{i\theta})$ に対する平均値の定理

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$$

を証明せよ.

(2) 開円板 B 内の点 $z = re^{i\theta} \neq 0$ に対し, $r < \rho < R$ をみたす ρ を選ぶとし, 点 $w = \dfrac{\rho^2}{r^2}z$ を決める. このとき, 積分路 $C : \zeta = \rho\, e^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ に沿った次の積分の値を求めよ.

$$I_1 = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad I_2 = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}d\zeta$$

(3) 点 z, w を除いて定義される関数 $g(\zeta) = \dfrac{\zeta(z-w)}{(\zeta - z)(\zeta - w)}$ は ζ を C 上に制限すると

$$g(\zeta) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \theta) + r^2}$$

をみたすことを確かめ, $\zeta \in C$ での $g(\zeta)$ の最大・最小値を求めよ.

(4) 積分公式

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R\,r\cos(\varphi - \theta) + r^2}d\varphi$$

を証明せよ.

(5) $u(re^{i\theta}) \geq 0$ ならば, 不等式

$$\frac{R-r}{R+r}u(0) \leq u(re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(0)$$

が成り立つことを示せ.

グラフ理論

$\boxed{2}$

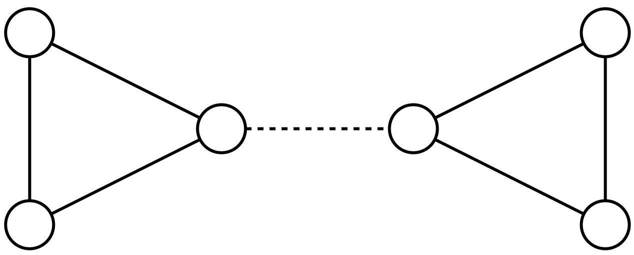
1. 単純連結無向グラフ $G=(V,E)$ に深さ優先探索を適用し，アルゴリズムが枝 $(u,v)\in E$ を u から v へたどったときに，節点 v を初めて訪れた場合は (u,v) を実線の矢印（方向は u から v）で描き，節点 v にすでに訪れていた場合は (u,v) を破線の矢印で描く．このとき，実線枝全体の集合は，深さ優先探索を始めた節点 $s\in V$ を根とする根付き木となることが知られている．以下の性質が成り立つことを示せ．

   性質: 任意の破線枝 (u,v)（矢印の方向は u から v）に対し，節点 v は u の先祖になっている（つまり，根付き木において s から u のパス上に v がある）．

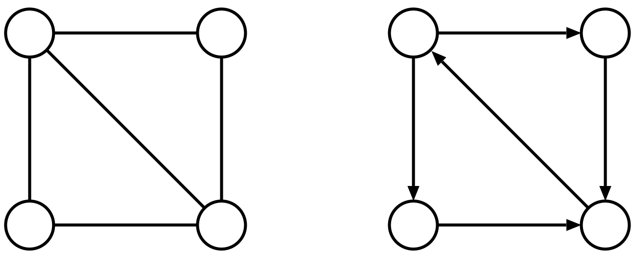
2. 無向グラフにおいて，1 つの枝を取り除くと連結成分が増えるとき，その枝を橋 (bridge) という．また，有向グラフにおいて，任意の 2 節点間に有向パスが存在するとき，強連結 (strongly connected) であるという．さらに，無向グラフの各枝に向きをつけて有向グラフに変形する操作を枝の向きづけ (orientation) と呼び，枝の向きづけによって得られたグラフが強連結であるとき強連結な向きづけと呼ぶ．以下の性質が成り立つことを示せ．

   性質: 単純連結無向グラフ G に強連結な向きづけが存在するための必要十分条件は，G に橋がないことである．

   参考のため，橋を持つグラフ，および無向グラフ (左) に対する強連結な向きづけの例 (右) を以下に示しておく．



橋を持つグラフ (中央の破線の枝が橋)



無向グラフ (左) とその強連結な向きづけ (右)

オペレーションズリサーチ

数理計画

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

次の非線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & & \boldsymbol{c} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{d}
\end{array}
$$

ただし，$f : I\!R^n \to I\!R$ は連続的微分可能関数，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ および $\boldsymbol{d}$ は $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{d}$ であるような n 次元定数ベクトルである．また，ベクトルの不等式は各成分ごとに不等式が成立することを意味する．以下の問 **(i), (ii)** に答えよ．

(i) 問題 (P) に対する 1 次の最適性条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件）を書け．

(ii) $\overline{\boldsymbol{x}}$ が問題 (P) の局所的最適解であるとき，次式を満たすベクトル $\boldsymbol{u} \in I\!R^m$ が存在することを示せ．

$$\mathrm{mid}\,\{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{d}, \nabla f(\overline{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}\} = \boldsymbol{0}$$

ここで，$\boldsymbol{A}^T$ は $\boldsymbol{A}$ の転置行列であり，３つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in I\!R^n$ に対して，$\mathrm{mid}\,\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$ は各ベクトルの第 i 成分 p_i, q_i, r_i $(i = 1, \ldots, n)$ の中央値（例えば $q_i \leqq r_i \leqq p_i$ ならば r_i ）を第 i 成分とする n 次元ベクトルを表す．

オペレーションズリサーチ

待ち行列

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

率 λ のポワソン過程に従い到着する客を、2 つのサーバ A, B が処理するシステムを考える。サーバ A は奇数番目に到着した客のみをサービスし、サーバ B は偶数番目に到着した客のみをサービスする。各サーバにおけるサービス順序は先着順である。客のサービス時間は独立同一で、パラメタ μ の指数分布に従う。このシステムが定常状態にあると仮定して、以下の (1) から (5) の問いに答えよ。

(1) サーバ A でサービスを受ける客の到着時間間隔 X の密度関数 $f(x)$ ならびにそのラプラス変換 $f^*(s)$ を求めよ。

(2) 十分な数の客がサーバ A のサービスを待っているとする。このとき客の到着時間間隔 X の間に k 人のサービスが終了する確率 a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ を $f(x)$ を用いて表現せよ。

(3) サーバ A でサービスを受ける客が到着する直前において、サーバ A でサービスされている客ならびにサーバ A でのサービスを待っている客の総数を L とする。L の定常状態確率を $\pi_j = \Pr(L = j)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ としたとき、π_j が満たす平衡状態方程式を a_k を用いて書き下せ。

(4) $\pi_j = \pi_0 \gamma^j$ $(j = 0, 1, \ldots)$ と仮定し、γ の満たす方程式を $f^*(s)$ を用いて表せ。

(5) (4) で仮定した定常状態確率 π_j が存在するための条件を λ と μ を用いて表せ。

現代制御論

$\boxed{4}$

状態空間システム

$$\Sigma:\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

を考える．ここに，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は，それぞれ時刻 t における状態ベクトルおよび入力ベクトルである．行列 A, B は適当な次元の定数行列である．

(i) システム Σ の可制御性の定義を x, u および x_0 を用いて述べよ．

(ii) システム Σ に対して，行列

$$W(0,T) = \int_0^T e^{-A\tau} BB' e^{-A'\tau} d\tau$$

を定義する（M' は M の転置を表す）．ある $T > 0$ に対して $W(0,T)$ が正則となるならば, システム Σ は可制御であることを証明せよ．

ヒント：入力ベクトルを

$$u(t) = -B' e^{-A't} f, \quad f \in \mathbb{R}^n:\ \text{定数ベクトル}$$

と表し，(i) の定義の条件を満たす f を求めよ．

(iii) システム Σ が可制御であるならば, ある $T > 0$ が存在して $W(0,T)$ が正則となることを証明せよ．

(iv) つぎの行列対 (A,B) に対して $W(0,T)$ を求め，可制御性を判定せよ．

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

物理統計学

5 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ。

平衡統計力学

体系の状態はベクトル $\{\boldsymbol{x}\}$ で表され、$\boldsymbol{x}$ という状態にあるときの体系のエネルギーを $E(\boldsymbol{x})$ と表す。いま体系は平衡系とし、$\boldsymbol{x}$ という状態の出現確率がカノニカル分布 $p_c(\boldsymbol{x}) = (1/Z)\exp[-E(\boldsymbol{x})/T]$ で与えられるとする。(T は温度を表し、ボルツマン定数を 1 とした。) 以下の問に答えよ。

1) 体系の自由エネルギーは $F = E - TS$ と定義される。ここで E は内部エネルギー、S はエントロピーを表す。E、S をカノニカル分布を用いて定義し、F と Z の関係を求めよ。

2）この体系について、（定積）比熱 C と状態方程式 $p = p(V,T)$（但し p は圧力、V は体系の体積）を求める手順を示せ。

3) N 個の粒子が体積 V の容器に入っている。これを理想気体として扱い、定積比熱 C と状態方程式 $p = p(V,T)$ を求めよ。

確率過程

確率過程 $\boldsymbol{x}(t)$ について以下の問に答えよ。ここで t は時間変数、また $\boldsymbol{x}(t)$ は有限次元のベクトルである。

1) $p(\boldsymbol{x}_1, t_1|\boldsymbol{x}_0, t_0)$ を、t_0 において $\boldsymbol{x}_0$ にいた系が、t_1 に $\boldsymbol{x}_1$ にいる遷移確率を表すとする。確率過程 $\boldsymbol{x}(t)$ がマルコフ過程のとき、遷移確率の満たすべきチャップマンーコロモゴルフ（CK）方程式

$$p(\boldsymbol{x}_2, t_2|\boldsymbol{x}_0, t_0) = \int d\boldsymbol{x}_1 p(\boldsymbol{x}_2, t_2|\boldsymbol{x}_1, t_1) p(\boldsymbol{x}_1, t_1|\boldsymbol{x}_0, t_0)$$

を導け。

2）1 次元の確率過程 $x(t)$ については、マルコフ過程でかつ、遷移確率が時間差のみの関数であるとする。すなわち、

$$p(x_1, t_1|x_0, t_0) = p(x_1, t_1 - t_0|x_0)$$

このとき、1）の CK 方程式から、次のフォッカープランク方程式を導け。

$$\partial p(x,t|x_0)/\partial t = -\partial[A(x)p(x,t|x_0)]/\partial x + (1/2)\partial^2[B(x)p(x,t|x_0)]/\partial x^2$$

但し、使用した仮定、および $A(x)$ と $B(x)$ の表式を明記せよ。

3) 1 次元のウイーナー過程 $w(t)$ に対して、その遷移確率は

$$p(w_1, t_1 - t_0|w_0) = [2\pi(t_1 - t_0)]^{-1/2}\exp[-(w_1 - w_0)^2/(2(t_1 - t_0))]$$

で与えられ、このウイーナー過程がマルコフ過程であることは知られている。このとき、$w(t)$ は厳密に $A(x) = 0$ と $B(x) = 1$ のフォッカープランク方程式を満足することを示せ。

力学系数学

$\boxed{6}$

次の問い，(1) と (2) に答えよ．

(1) 実数値パラメータ ε を含む，(x, y)-平面上の１階常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - (x^3 - \varepsilon x) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases} \tag{i}$$

を考える．ε の値が 0 ではなく，$-1 < \varepsilon < 1$ を満たすとき，(i) の唯一の平衡点である原点の安定性を論ぜよ．また，原点近傍の解軌道の概形を描け．

(2) (i) において $\varepsilon = 0$ として得られる，(x, y)-平面上の１階常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases} \tag{ii}$$

を考える．(ii) の唯一の平衡点である原点が安定であることを示せ（原点は漸近安定になるが,「漸近」まで示す必要はない）．

以上