

# 基礎数学 I

1

[I] 実パラメータ  $x$  をもつ 実数  $t$  の関数

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{te^{xt}}{e^t - 1} & (t \neq 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases}$$

は  $t = 0$  で微分可能であることを示せ .

[II] [I] の関数のテイラー展開

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

により  $x$  の多項式  $B_n(x)$  を導入する . 以下の問いに答えよ .

(1)  $B_0(0), B_1(0), B_2(0)$  を計算せよ .

(2)  $B_{2n+1}(0) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を証明せよ .

(3) 多項式  $B_n(x)$  は微分方程式

$$\frac{dB_n(x)}{dx} = nB_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすことを示せ .

(4)  $B_n(x+1) - B_n(x)$  を自然数  $n$  と実数  $x$  を用いて表せ .

(5) 任意の  $n$  について積分

$$I_n \equiv \int_0^1 B_n(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を計算せよ .