

線形計画

3

問 1

与えられた $m \times n$ 実行列 A と m 次元実ベクトル b に対して, 1 次不等式系 $Ax \geq b$ を満たすベクトル x の集合は空でないと仮定する. 線形計画の双対定理を用いて, 次の (i) と (ii) は等価であることを示せ. ただし, c は n 次元実ベクトル, α は実数であり, z^T は z の転置を表す.

(i) $Ax \geq b$ を満たす任意のベクトル x に対して $c^T x \geq \alpha$ が成り立つ.

(ii) $A^T y = c$ かつ $b^T y \geq \alpha$ を満たす m 次元ベクトル $y \geq 0$ が存在する.

問 2

次のような実パラメータ θ を含む線形計画問題 $P(\theta)$ を考える.

$$\begin{aligned} P(\theta) : \quad & \text{minimize} \quad c^T x \\ & \text{subject to} \quad Ax \geq b + \theta d \end{aligned}$$

ただし, A は $m \times n$ 定数行列, c は n 次元定数ベクトル, b と d は m 次元定数ベクトルである. また, 問題 $P(\theta)$ は任意の実数 θ に対して最適解をもつものとし, 目的関数 $c^T x$ の最小値をパラメータ θ の関数とみなして $f(\theta)$ と表す. そのとき, $f(\theta)$ は凸関数となることを示せ.