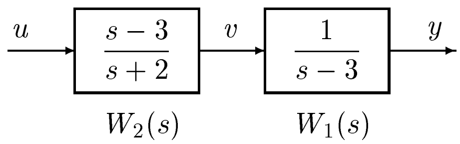
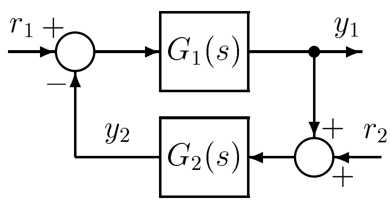
線形制御理論

$\boxed{4}$

1 下図のように伝達関数 $W_1(s) = 1/(s-3)$ を安定化する目的で，その前に $W_2(s) = (s-3)/(s+2)$ を直列に配置した．これによって，システムが安定化できたといえるかどうか，理由を付して答えよ．



2 下図のフィードバック制御系について以下の問に答えよ．



a) フィードバック制御系の (内部) 安定性の定義を述べよ．さらに，フィードバック制御系が安定となるための必要十分条件を $G_1(s)$, $G_2(s)$ を用いて述べよ．(証明不要)

b) 有理伝達関数 $G_1(s)$, $G_2(s)$ の既約分数表現を

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

とおく．このとき，

$$\Delta(s) := D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)$$

がフルビッツ多項式であれば，フィードバック系は安定となることを証明せよ．

c) 伝達関数は次式で与えられるとする．

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \frac{1}{s^2(s+2)}, \qquad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{K(s+0.5)}{s+3} \tag{a}$$

パラメータ K が変化するとする．フィードバック系が安定となるための K のとり得る範囲をラウス・フルビッツの方法を用いて求めよ．

d) 式 (a) の $G_1(s)$, $G_2(s)$ に対して，$D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) = 0$ の根軌跡を描け．ただし，$0 \leq K < \infty$ とする．

略 解

1.　2つの伝達関数 $G_1(s) = (s-3)/(s+2)$, $G_2(s) = 1/(s-3)$ を直列に結合すると, システムの伝達関数は $T(s) = 1/(s+2)$ となる. しかし消去された因子 $s-3$ は不安定であるために, これを影の不安定モードという. 影の不安定モードが存在する場合には, システムが見かけ上は安定であってもシステムの出力は発散する. ただし, 影のモードが安定なものであれば, このような問題は生じない.

伝達関数 $G_1(s)$, $G_2(s)$ の初期値を考慮して, 微分方程式で表すと, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = -2x - 5u, \quad v = x + u, \quad x(0) = x_0 \\
&\dot{y} = 3y + v, \quad y(0) = y_0
\end{aligned}$$

上式をラプラス変換すると,

$$sx(s) - x_0 = -2x(s) - 5u(s), \quad sy(s) - y_0 = 3y(s) + x(s) + u(s)$$

となるので, $x(s)$ を消去すると次式を得る.

$$y(s) = \frac{y_0}{s-3} + \frac{x_0}{(s-3)(s+2)} + \frac{1}{s+2}u(s)$$

これを逆変換すると,

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{x_0}{5}\right)e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

となる. よって, $y_0 + x_0/5 = 0$ でない限り, 出力 $y(t)$ は発散する.

2-a) フィードバック系の安定性は, $r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ を入力, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ を出力とする 2 入力 2 出力系の入出力安定として定義する．すなわち, システムの入出力関係を

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

と表すとき, 任意の有界入力 $r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ に対して, 出力 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ が有界となることである.

そのための必要十分条件は 4 つの伝達関数 $H_{11}(s),\ H_{12}(s),\ H_{21}(s),\ H_{22}(s)$ がすべて安定となることである．これは, 2 つの伝達関数 $H_{11}(s),\ H_{22}(s)$ が安定となることと等価である.

2-b) H_{11}, H_{22} を計算すると, つぎのようになる.

$$H_{11}(s) = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}, \quad H_{22}(s) = \frac{N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

α) これらの伝達関数が極零点消去が存在しないとする．$\Delta(s)$ がフルビッツであれば, $H_{11}(s)$, $H_{22}(s)$ が安定となるので, フィードバック系は安定となる.

β) $N_1(s)$ と $D_2(s)$ あるいは $N_2(s)$, $D_1(s)$ の間に極零点消去が存在しても, H_{11}, H_{22} の極は $\Delta(s) = 0$ の根であるから, $\Delta(s)$ がフルビッツであれば, $H_{11}(s)$, $H_{22}(s)$ は安定となる.

2-c) 特性多項式は $A(s) = s^4 + 5s^3 + 6s^2 + Ks + K/2$ となる．よってラウス表は以下のように与えられる.

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 6 & K/2 \\ s^3 & 5 & K & \\ s^2 & 6 - K/5 & K/2 & \\ s^1 & K - \dfrac{25K/2}{6 - K/5} & & \\ s^0 & K/2 & & \end{array}$$

これより, 安定条件は

$$6 - K/5 > 0, \quad K - \frac{25K/2}{6 - K/5} > 0, \quad K/2 > 0$$

となる．これを整理すると, 安定条件として $0 < K < 35/2$ を得る.

2-d)　根軌跡

$$G(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+3)} = \frac{K(s+0.5)}{s^4+5s^3+6s^2}$$

1. $\nu = 3$

2. 極 ： $s = 0,\ 0,\ -2,\ -3;$ 零点 ： $s = -1/2,\ \infty,\ \infty\ \infty$

3. 実軸上の区間 $(-\infty,\ -3], [-2,\ -1/2)$ は根軌跡の一部である

4. $s_g = -(a_1 - b_1)/\nu = -(5-1)/3 = -4/3$
   漸近線は点 $(-4/3,\ j0)$ を通過する傾き $\pm 60^\circ$ の直線となる.

5. 安定条件 $0 < K < 35/2$ より, $K = 0$, $K = 35/2$ のとき, 根軌跡は虚軸上にある.
   $K = 35/2$ のとき, 特性多項式は次のように因数分解できる.

$$\begin{aligned} s^4 + 5s^3 + 6s^2 + (35/2)s + 35/4 = s^4 + 6s^2 + 35/4 + 5s(s^2 + 7/2) \\ =&(s^2 + 7/2)(s^2 + 5/2) + 5s(s^2 + 7/2) \\ =&(s^2 + 7/2)(s^2 + 5s + 5/2) = 0 \end{aligned}$$

   よって, 点 $s = \pm\sqrt{7/2}j \simeq \pm 2.78j$ において根軌跡は虚軸を横切る.