基礎数学 II

$\boxed{6}$

A を $m \times n$ 複素行列とする。A は $\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^m$ への線形写像を与える。A^* で A のエルミート共役行列を表す。つまり、$A^* = \overline{A}^T$. ここに、$\overline{A}$ は A の複素共役行列、$\overline{A}^T$ は $\overline{A}$ の転置行列である。明らかに、A^* は $\mathbf{C}^m$ から $\mathbf{C}^n$ への線形写像となる。$\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}^m$ にはそれぞれ標準的な内積 $\langle\ ,\ \rangle_n, \langle\ ,\ \rangle_m$ が定義されているとする。たとえば、$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k v_k$. ただし、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{C}^n$ の標準基底に関する成分をそれぞれ u_k, v_k で表した。以下の事実を証明せよ。

(1) $\langle A^* \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_n = \langle \boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x} \rangle_m, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^m,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$

(2) $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$

(3) $\operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^* = \mathbf{C}^m$

(4) $\operatorname{Im} A^* \oplus \operatorname{Ker} A = \mathbf{C}^n$

(5) $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \operatorname{Im} A^*$

(6) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AA^*$

ただし、$\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A$ 等はそれぞれ、

$$\operatorname{Im} A = \{A\boldsymbol{x} |\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n\}, \qquad \operatorname{Ker} A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n |\, A\boldsymbol{x} = 0\}$$

で定義される。また、部分ベクトル空間 V に対して $V^\perp$ は V の直交補空間を表し、$\oplus$ は直和記号である。