

# グラフ理論

2

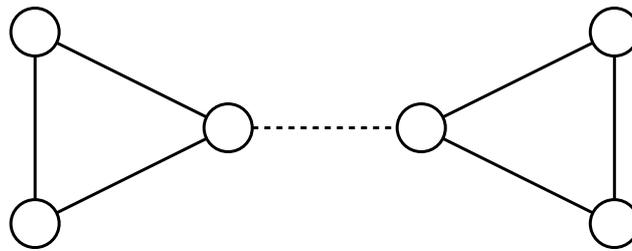
1. 単純連結無向グラフ  $G = (V, E)$  に深さ優先探索を適用し, アルゴリズムが枝  $(u, v) \in E$  を  $u$  から  $v$  へたどったときに, 節点  $v$  を初めて訪れた場合は  $(u, v)$  を実線の矢印 (方向は  $u$  から  $v$ ) で描き, 節点  $v$  にすでに訪れていた場合は  $(u, v)$  を破線の矢印で描く. このとき, 実線枝全体の集合は, 深さ優先探索を始めた節点  $s \in V$  を根とする根付き木となることが知られている. 以下の性質が成り立つことを示せ.

性質: 任意の破線枝  $(u, v)$  (矢印の方向は  $u$  から  $v$ ) に対し, 節点  $v$  は  $u$  の先祖になっている (つまり, 根付き木において  $s$  から  $u$  のパス上に  $v$  がある).

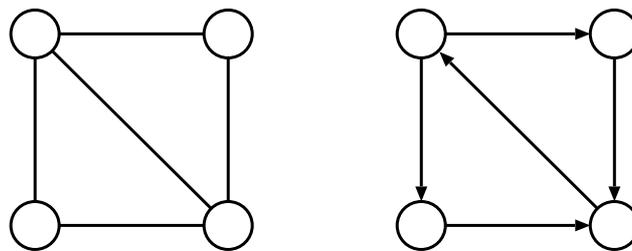
2. 無向グラフにおいて, 1つの枝を取り除くと連結成分が増えるとき, その枝を橋 (bridge) という. また, 有向グラフにおいて, 任意の2節点間に有向パスが存在するとき, 強連結 (strongly connected) であるという. さらに, 無向グラフの各枝に向きをつけて有向グラフに変形する操作を枝の向きづけ (orientation) と呼び, 枝の向きづけによって得られたグラフが強連結であるとき強連結な向きづけと呼ぶ. 以下の性質が成り立つことを示せ.

性質: 単純連結無向グラフ  $G$  に強連結な向きづけが存在するための必要十分条件は,  $G$  に橋がないことである.

参考のため, 橋を持つグラフ, および無向グラフ (左) に対する強連結な向きづけの例 (右) を以下に示しておく.



橋を持つグラフ (中央の破線の枝が橋)



無向グラフ (左) とその強連結な向きづけ (右)