オペレーションズリサーチ

数理計画

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて２問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

次の非線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& & \boldsymbol{c} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{d}
\end{array}
$$

ただし，$f : I\!R^n \to I\!R$ は連続的微分可能関数，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ および $\boldsymbol{d}$ は $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{d}$ であるような n 次元定数ベクトルである．また，ベクトルの不等式は各成分ごとに不等式が成立することを意味する．以下の問 **(i), (ii)** に答えよ．

(i) 問題 (P) に対する１次の最適性条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件）を書け．

(ii) $\overline{\boldsymbol{x}}$ が問題 (P) の局所的最適解であるとき，次式を満たすベクトル $\boldsymbol{u} \in I\!R^m$ が存在することを示せ．

$$\operatorname{mid}\{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{d}, \nabla f(\overline{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u}\} = \boldsymbol{0}$$

ここで，$\boldsymbol{A}^T$ は $\boldsymbol{A}$ の転置行列であり，３つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in I\!R^n$ に対して，$\operatorname{mid}\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$ は各ベクトルの第 i 成分 p_i, q_i, r_i $(i = 1, \ldots, n)$ の中央値（例えば $q_i \leqq r_i \leqq p_i$ ならば r_i ）を第 i 成分とする n 次元ベクトルを表す．

オペレーションズリサーチ

待ち行列

3 この科目は数理計画と待ち行列あわせて2問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

率 λ のポワソン過程に従い到着する客を、2つのサーバ A, B が処理するシステムを考える。サーバ A は奇数番目に到着した客のみをサービスし、サーバ B は偶数番目に到着した客のみをサービスする。各サーバにおけるサービス順序は先着順である。客のサービス時間は独立同一で、パラメタ μ の指数分布に従う。このシステムが定常状態にあると仮定して、以下の (1) から (5) の問いに答えよ。

(1) サーバ A でサービスを受ける客の到着時間間隔 X の密度関数 $f(x)$ ならびにそのラプラス変換 $f^*(s)$ を求めよ。

(2) 十分な数の客がサーバ A のサービスを待っているとする。このとき客の到着時間間隔 X の間に k 人のサービスが終了する確率 a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ を $f(x)$ を用いて表現せよ。

(3) サーバ A でサービスを受ける客が到着する直前において、サーバ A でサービスされている客ならびにサーバ A でのサービスを待っている客の総数を L とする。L の定常状態確率を $\pi_j = \Pr(L = j)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ としたとき、π_j が満たす平衡状態方程式を a_k を用いて書き下せ。

(4) $\pi_j = \pi_0 \gamma^j$ $(j = 0, 1, \ldots)$ と仮定し、γ の満たす方程式を $f^*(s)$ を用いて表せ。

(5) (4) で仮定した定常状態確率 π_j が存在するための条件を λ と μ を用いて表せ。