現代制御論

$\boxed{4}$

状態空間システム

$$\Sigma:\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

を考える．ここに，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は，それぞれ時刻 t における状態ベクトルおよび入力ベクトルである．行列 A, B は適当な次元の定数行列である．

(i) システム Σ の可制御性の定義を x, u および x_0 を用いて述べよ．

(ii) システム Σ に対して，行列

$$W(0,T) = \int_0^T e^{-A\tau} BB' e^{-A'\tau} d\tau$$

を定義する（M' は M の転置を表す）．ある $T > 0$ に対して $W(0,T)$ が正則となるならば, システム Σ は可制御であることを証明せよ．

ヒント：入力ベクトルを

$$u(t) = -B' e^{-A't} f, \quad f \in \mathbb{R}^n\text{: 定数ベクトル}$$

と表し，(i) の定義の条件を満たす f を求めよ．

(iii) システム Σ が可制御であるならば, ある $T > 0$ が存在して $W(0,T)$ が正則となることを証明せよ．

(iv) つぎの行列対 (A,B) に対して $W(0,T)$ を求め，可制御性を判定せよ．

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$