

物理統計学

5 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ。

平衡統計力学

体系の状態はベクトル $\{x\}$ で表され、 x という状態にあるときの体系のエネルギーを $E(x)$ と表す。いま体系は平衡系とし、 x という状態の出現確率がカノニカル分布 $p_c(x) = (1/Z) \exp[-E(x)/T]$ で与えられるとする。(T は温度を表し、ボルツマン定数を 1 とした。) 以下の問に答えよ。

- 1) 体系の自由エネルギーは $F = E - TS$ と定義される。ここで E は内部エネルギー、 S はエントロピーを表す。 E 、 S をカノニカル分布を用いて定義し、 F と Z の関係を求めよ。
- 2) この体系について、(定積) 比熱 C と状態方程式 $p = p(V, T)$ (但し p は圧力、 V は体系の体積) を求める手順を示せ。
- 3) N 個の粒子が体積 V の容器に入っている。これを理想気体として扱い、定積比熱 C と状態方程式 $p = p(V, T)$ を求めよ。

確率過程

確率過程 $x(t)$ について以下の問に答えよ。ここで t は時間変数、また $x(t)$ は有限次元のベクトルである。

- 1) $p(x_1, t_1 | x_0, t_0)$ を、 t_0 において x_0 にいた系が、 t_1 に x_1 にいる遷移確率を表すとす。確率過程 $x(t)$ がマルコフ過程のとき、遷移確率の満たすべきチャップマン-コロモゴルフ (CK) 方程式

$$p(x_2, t_2 | x_0, t_0) = \int dx_1 p(x_2, t_2 | x_1, t_1) p(x_1, t_1 | x_0, t_0)$$

を導け。

- 2) 1次元の確率過程 $x(t)$ については、マルコフ過程でかつ、遷移確率が時間差のみ関数であるとする。すなわち、

$$p(x_1, t_1 | x_0, t_0) = p(x_1, t_1 - t_0 | x_0)$$

このとき、1) の CK 方程式から、次のフォッカー-プランク方程式を導け。

$$\partial p(x, t | x_0) / \partial t = -\partial [A(x)p(x, t | x_0)] / \partial x + (1/2) \partial^2 [B(x)p(x, t | x_0)] / \partial x^2$$

但し、使用した仮定、および $A(x)$ と $B(x)$ の表式を明記せよ。

- 3) 1次元のウィーナー過程 $w(t)$ に対して、その遷移確率は

$$p(w_1, t_1 - t_0 | w_0) = [2\pi(t_1 - t_0)]^{-1/2} \exp[-(w_1 - w_0)^2 / (2(t_1 - t_0))]$$

で与えられ、このウィーナー過程がマルコフ過程であることは知られている。このとき、 $w(t)$ は厳密に $A(x) = 0$ と $B(x) = 1$ のフォッカー-プランク方程式を満足することを示せ。