平成 16 年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
数理工学専攻
入学者選抜試験問題

基礎科目

試験日時: 平成 15 年 8 月 6 日、午後 1 時 00 分より 3 時 00 分まで。

選択科目: 基礎数学 I、アルゴリズム基礎、線形計画、線形制御理論、基礎力学、基礎数学 II

注意: (1) 上記科目から 2 科目選択すること。3 科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。

(2) 解答は 1 科目につき解答用紙 1 枚に記入すること。解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。

(3) 解答用紙は問題毎に回収する。
問題用紙及び計算用紙は持ち帰ること。

基礎数学 I

$\boxed{1}$

関数

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \qquad (x > 0)$$

について以下の問いに答えよ.

(i) 微分方程式

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) - \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

の解 $f(x)$ を関数 $\mathrm{Ei}(x)$ を用いて表せ.

(ii) 任意の自然数 n について以下が成り立つことを示せ.

$$\frac{d^n \mathrm{Ei}(x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} \int_0^x e^{-t} t^{n-1}\, dt$$

(iii) 以下が成り立つことを示せ.

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty e^{-t} \log t\, dt - e^{-x} \log x$$

(iv) 積分

$$\int_0^\infty e^{-t} \log t\, dt$$

が存在することを示せ.

(v) $g(x) = \log x + \mathrm{Ei}(x)$（ただし $x > 0$）とおくとき，極限

$$\lim_{x\to 0+} g(x)$$

が存在することを示せ.

アルゴリズム基礎

2

配列に格納された整数データの整列に関し, 以下の問いに答えよ.

(i) 長さ n_1 と n_2 の配列 A_1 と A_2 がすでに整列されているとして, 長さ $n_1 + n_2$ の整列配列 A への併合を最悪時間量 $O(n_1 + n_2)$ で行うアルゴリズムを, 時間量の評価と共に与えよ. このアルゴリズムを $\mathrm{merge}(A_1, A_2, A)$ と記す.

(ii) つぎの再帰的アルゴリズム sort を用いて, $\mathrm{sort}(A[1, n])$ を実行すれば, 長さ n の任意の配列 A が整列されることを説明せよ. ただし, $A[i, j]$ は配列 A のセル i からセル j までの部分配列を示す. また, sort の最悪時間量を評価せよ.

> $\mathrm{sort}(A[i, j])$:
>   if $j - i < 1$, then return;
> $s \leftarrow i + \lfloor (j - i)/2 \rfloor$;
> $\mathrm{sort}(A[i, s])$;
> $\mathrm{sort}(A[s + 1, j])$;
> $\mathrm{merge}(A[i, s], A[s + 1, j], A[i, j])$;
>   return;

(iii) $\mathrm{sort}(A[1, n])$ を実行すると, 配列 A の各要素は、配列内で移動を繰り返す。さて、A の任意の要素について、計算終了までにその要素が移動する距離の総和は n 以下であることを示せ. ただし, 配列のセル i からセル j への移動距離を $|j - i|$ とし、また、この問いでは、配列 A のすべての要素は異なる値をとると仮定する。

線形計画

$\boxed{3}$

次の線形計画問題 (P) を考える．

$$
\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^\top$ は変数ベクトル，$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^\top$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^\top$, $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_m)^\top$ は定数ベクトルであり, $^\top$ は転置記号を表す.

ベクトル $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{d}$ の成分はすべて正であり，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成分はすべて非零であると仮定する．さらに，$\mathcal{I} = \{i \mid a_i > 0\}$, $\bar{\mathcal{I}} = \{i \mid a_i < 0\}$, $\mathcal{J} = \{j \mid b_j > 0\}$, $\bar{\mathcal{J}} = \{j \mid b_j < 0\}$ と表す.

以下の問 **(i), (ii), (iii), (iv)** に答えよ.

(i) 問題 (P) の双対問題 (D) を書け.

(ii) $\mathcal{J} \neq \emptyset$ かつ $\bar{\mathcal{J}} \neq \emptyset$ ならば，双対問題 (D) は実行可能解をもたないことを示せ.

(iii) $\bar{\mathcal{J}} = \emptyset$ のとき，問題 (P) が最適解をもつための必要十分条件は

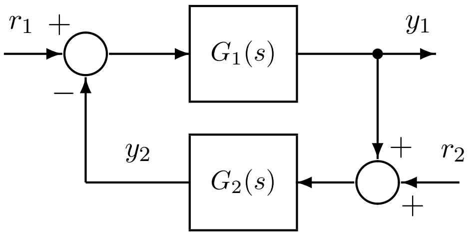
$$
\mathcal{I} \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad \max_{1 \leqq j \leqq m} \frac{d_j}{b_j} \leqq \min_{i \in \mathcal{I}} \frac{c_i}{a_i}
$$

であることを示せ．さらに，そのときの問題 (P) の最小値を求めよ.

(iv) $\mathcal{J} = \emptyset$ のとき，問題 (P) が最適解をもつための必要十分条件を与えよ．さらに，そのときの問題 (P) の最小値を求めよ.

線形制御理論

$\boxed{4}$



上図のフィードバック制御系について以下の問いに答えよ．ただし, r_1, r_2 は外部からの信号, y_1 および y_2 はそれぞれ前向き要素 $G_1(s)$ および後ろ向き要素 $G_2(s)$ の出力である.

(i) フィードバック制御系の (内部) 安定性の定義を述べよ．さらに, フィードバック制御系の安定性を判別するナイキストの安定定理を分かり易く説明せよ.

以下では, 伝達関数 $G_1(s)$, $G_2(s)$ を

$$G_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, \quad G_2(s) = \frac{K(s^2+s+1)}{s}$$

とする．ただし, K は調整可能なパラメータである.

(ii) ラウス・フルビッツの方法を用いて, 図のフィードバック制御系が安定となるようなゲイン K の範囲を求めよ.

(iii) $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ とおく．ただし, ここでは $K = 1$ とする.

(a) $G(j\omega)$ の実部 $x(\omega)$, 虚部 $y(\omega)$ を求め, $x(\omega) = 0$ となる角周波数, および $y(\omega) = 0$ となる角周波数を求めよ.

(b) 原点に極があることに注意して $G(s)$ $(K=1)$ のナイキスト線図を描け.

(iv) 上に描いたナイキスト線図を利用して, フィードバック制御系が (内部) 安定となるようなゲイン K の範囲を求めよ．ただし, (i) で述べたナイキストの安定定理に即して説明すること.

基礎力学

5

時刻 $t=0$ に，質量 m の燃料を積んだロケット (燃料を除いた質量は M_0) が静止している．ロケットは，時刻 $t=0$ から，単位時間あたり質量 ρ(定数) の燃料を，ロケットから後方に相対的な速さ u(正の定数) で噴射しはじめ，一つの直線上を進むものとする．

(i)　最初に，外力が作用していない場合を考える．時刻 t で，燃料を含むロケットの質量は M，ロケットの速度は V であった．微小時間 δt だけ経過した時刻 $t+\delta t$ のときに質量，速度はそれぞれ微小に変化し，$M-\delta M$，$V+\delta V$ となったとする．この微小時間 δt の間に，質量 δM の燃料が，ロケットから後方に相対的な速さ u で噴射される．ロケットと燃料の運動量の和の保存則 (運動量の和が時刻 t と $t+\delta t$ で同じ) を書き下せ．

(ii)　外力が作用していない場合に (i) で求めた保存則で，２次の微小量を無視し，両辺を δt で割り，$\delta t \to 0$ の極限をとって微分方程式を書き下し，方程式を解き，すべての燃料を噴射し終えたあとのロケットの速度を求めよ．

(iii)　次に，速度に比例する抵抗力 (比例係数を γ とする．) が作用する場合を考える．この場合にも (i) と同様に考えると，２つの時刻 t と $t+\delta t$ の間での全運動量の変化はその間の抵抗力による力積に等しいことより関係式を書き下し，$\delta t \to 0$ の極限をとって微分方程式を求め，方程式を解いてすべての燃料を噴出し終えた時刻でのロケットの速度を求めよ．

基礎数学 II

$\boxed{6}$

A, B はともに $n \times n$ 実行列であるとする．A, B の列ベクトルをそれぞれ左から順に $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, および $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ とする．$\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{b}_j$ との標準内積を $g_{ij} := \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{b}_j$ とおき, g_{ij} を (i, j) 成分とする $n \times n$ 行列を G と書く．ただし, ^{T} は転置作用素である．このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) A, B がともに直交行列であるとき, G もまた直交行列となることを証明せよ.

(ii) A, B は直交行列とは仮定しないで, $A = B$ のとき, $\det G \geq 0$ を示せ．ただし, $\det$ は行列式を表す記号である.

(iii) A, B は正則行列で, $n = 3$ かつ $A = B$ のとき, $\sqrt{\det G}$ は, $\mathbf{R}^3$ においてベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を稜とする平行６面体の体積を表すことを示せ.

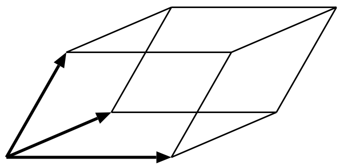


Figure 1: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を稜とする平行６面体

(iv) $1 \leq r \leq n$ なる整数 r に対し, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立であるための必要十分条件は

$$\det G_r > 0$$

であることを示せ．ただし, G_r は $g'_{ij} := \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$ を (i, j) 成分とする $r \times r$ 行列である.

平成16年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
数理工学専攻
入学者選抜試験問題

専門科目

試験日時: 平成15年8月6日、午後3時15分より5時15分まで。

選択科目: 応用数学、グラフ理論、オペレーションズリサーチ、現代制御論、物理統計学、力学系数学

注意: (1) 上記科目から2科目選択すること。3科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。

(2) 解答は1科目につき解答用紙1枚に記入すること。解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。

(3) 解答用紙は問題毎に回収する。
問題用紙及び計算用紙は持ち帰ること。

応用数学

$\boxed{1}$

複素平面$\mathbb{C}$において，実軸上の閉区間$[-1,1]$を含む単連結領域Dを考える．D内の反時計回りに向き付けられた単純閉曲線Cで，Cを境界とする有界領域に$[-1,1]$が含まれるものを考える（図を参照せよ）．$f(z)$をD上で正則な関数とするとき，以下の問いに答えよ.

(i) n個の任意の実数$A_k(k=1,\cdots,n)$と，$-1<a_1<a_2<\cdots<a_n<1$を満たすような任意の実数a_k $(k=1,\cdots,n)$に対して，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-a_k}\right) f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k)$$

を示せ.

(ii) $z \notin [-1,1]$なる任意の複素数zに対して，

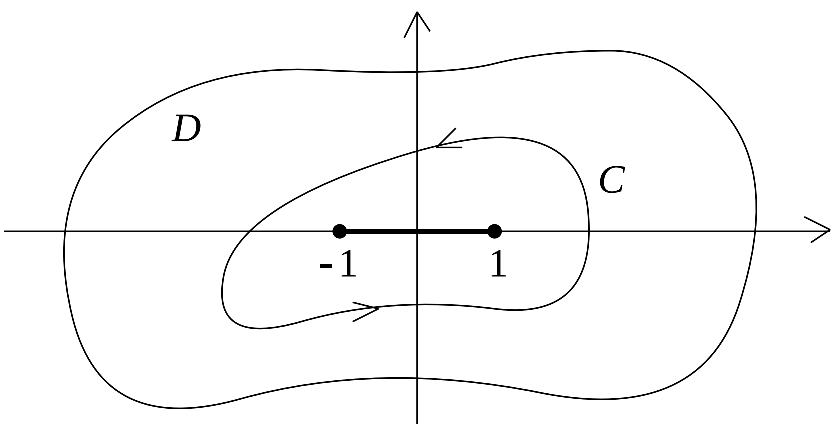
$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{z-x}dx = \mathrm{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

を示せ．ただし，$\mathrm{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$は，$z=x>1$のときに実数値となるように対数関数の分枝を選んだものである.

(iii) 以下の等式を示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) f(z)dz = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

注： 領域とは連結開集合のことをいう.



図

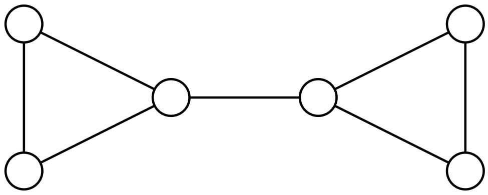
グラフ理論

$\boxed{2}$　無向グラフ $G = (V, E)$ を考える．1つの枝を取り除くと連結成分が増えるとき, その枝を橋 (bridge) という．また, 枝の部分集合 $M \subseteq E$ のどの2本の枝も同じ節点に接続しないとき, M をマッチング (matching) という．節点集合 V の全ての節点がそれに接続する M の枝を持つとき, M を完全マッチングという．以下の問いに答えよ.

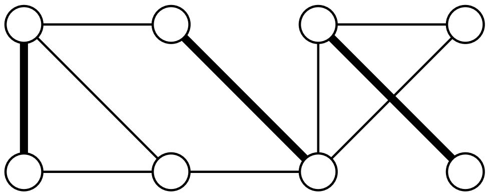
(i) グラフ $G = (V, E)$ が完全マッチングを持つための必要条件は, 節点数 $|V|$ が偶数であることを説明せよ.

(ii) グラフ $G = (V, E)$ が完全マッチングをただ一つ持つならば G は橋を持つ, という性質が知られている．この性質と (i) の性質を利用して, 完全マッチングをただ一つ持つことが分かっているグラフが与えられたときに, そのような完全マッチングを実際に求めるアルゴリズムを構成せよ.

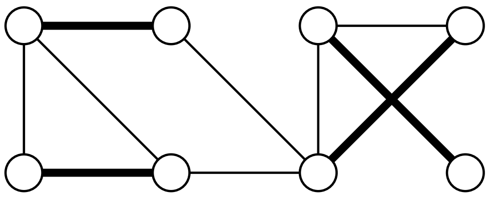
参考のため, 橋, およびマッチングの例を以下に示しておく.



橋の例 (中央の枝)



完全マッチングではないマッチングの例 (太線の枝の集合)



完全マッチングの例 (太線の枝の集合)

オペレーションズリサーチ

数理計画

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

次の非線形計画問題 (P) を考える.

$$
\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & c_i(\boldsymbol{x}) \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \end{array}
$$

ただし，$f : I\!R^n \to I\!R$ は 2 回連続的微分可能な凸関数，$c_i : I\!R^n \to I\!R$ $(i = 1, \ldots, m)$ はすべて 2 回連続的微分可能な凹関数とする[1]．さらに，狭義の不等式 $c_i(\boldsymbol{x}) > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ を満たす実行可能解の集合 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \mid c_i(\boldsymbol{x}) > 0 \ (i = 1, \ldots, m)\}$ は空でないと仮定する.

この問題 (P) に対して，関数 $F_r : \Omega \to I\!R$ を次式で定義する.

$$
F_r(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - r \sum_{i=1}^{m} \log(c_i(\boldsymbol{x}))
$$

ただし，r は正のパラメータ，log は自然対数を表す.

以下の問 **(i)**, **(ii)** に答えよ.

(i) 関数 F_r は凸関数であることを示せ.

(ii) $\{r_k\}$ を 0 に収束する正数列とし，各 r_k に対して関数 F_{r_k} は停留点 $\boldsymbol{x}^k \in \Omega$ をもつものとする．そのとき，$\{\boldsymbol{x}^k\}$ および $\left\{\dfrac{r_k}{c_i(\boldsymbol{x}^k)}\right\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ が有界ならば，点列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ の任意の集積点 $\boldsymbol{x}^*$ は問題 (P) の最適解であることを示せ.

[1]関数 c_i が凹関数であるとは，関数 $-c_i$ が凸関数であることである.

オペレーションズリサーチ

待ち行列

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて２問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

以下のような単一サーバ待ち行列システムを考える．客は率 $\lambda\ (>0)$ のポワソン過程に従いシステムに到着し，先着順でサービスを受ける．サーバは低速モード，高速モードという二つの状態のいずれかをとる．低速モードのサーバは率 $\mu_1\ (\geq 0)$ でサービスを行う．低速モードにおいて系内客数が $N+1$ 人以上になれば，サーバは高速モードに切り替わる．高速モードのサーバーは率 $\mu_2\ (>0)$ でサービスを行い，システムが空になった時点で低速モードに切り替わる．このシステムの系内客数過程は連続時間マルコフ連鎖で記述でき，遷移速度図は図１で与えられる．

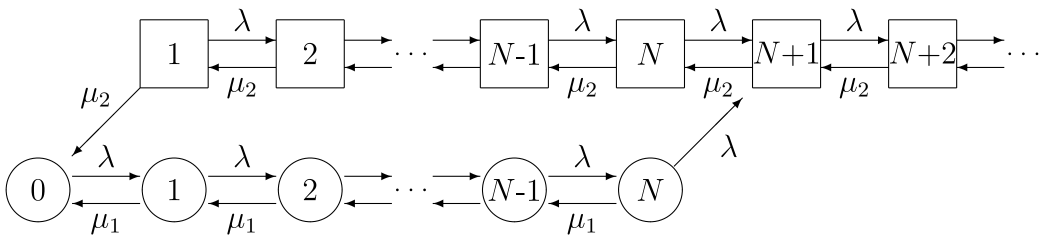


図 1: 遷移速度図

ここで○で囲まれた数字は低速モードにおける系内客数を表し，□で囲まれた数字は高速モードにおける系内客数を表している．以下では，システムが定常状態にあると仮定する．サーバが低速モードにあり，かつ，系内客数が i 人（$i=0,1,\ldots,N$）である定常状態確率を p_i，サーバが高速モードにあり，かつ，系内客数が i 人（$i=1,2,\ldots$）である定常状態確率を q_i として，(i) から (v) の問いに答えよ．

(i) $\lambda p_N = \mu_2 q_1$ を示せ．

(ii) $\rho = \lambda/\mu_2 \neq 1$ とする．q_i（$i=2,3,\ldots$）を q_1 を用いて表せ．

(iii) $\gamma = \mu_1/\lambda \neq 1$ とする．p_i（$i=0,1,\ldots,N-1$）を p_N を用いて表せ．

(iv) 定常状態確率が存在するための必要条件を与え，p_N を求めよ．

(v) $\mu_1 = 0$（すなわち $\gamma = 0$）とする．サーバが低速モードから高速モードに切り替わってから，低速モードに戻った後，再び高速モードに切り替わるまでの平均時間 T を求めよ．

現代制御論

$\boxed{4}$

状態空間システム

$$\Sigma: \quad \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

を考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ と $u(t) \in \mathbb{R}^m$ はそれぞれ時刻 t における状態ベクトルおよび入力ベクトルである．以下の問いに答えよ．

(i) システム Σ の可制御性の定義を x と u を用いて書け．

以下では，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad n = 4, \quad m = 1$$

として，システム Σ に対して状態フィードバック制御

$$u(t) = Kx(t), \quad K = (k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4)$$

を適用する．ただし，k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ は実数のパラメータである．

(ii) システム Σ は可制御ではないことを示し，その不可制御モードをすべて求めよ．

(iii) 閉ループ極 ($A + BK$ の固有値) を $\{-1,\ -1,\ -1,\ -1\}$ に配置するゲイン K は存在するか？存在しないならば，その理由を述べよ．存在するならば，そのようなゲイン K を求めよ．

(iv) 閉ループ極を $\{-2,\ -2,\ -2,\ -2\}$ に配置するゲイン K は存在するか？存在しないならば，その理由を述べよ．存在するならば，そのようなゲイン K を求めよ．

物理統計学

$\boxed{5}$ 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ.

平衡統計力学

スピンからなる系の平衡状態の性質について考える. 各スピン変数は1あるいは-1の値を取るものとする. またボルツマン定数は1, 体系の温度はTとし, カノニカル分布則が成り立つものとする. 以下の問いに答えよ.

i) 一つのスピンが, 外部磁場Bの中に置かれている. この系のエネルギーEはスピン変数sを用いて, $E = -sB$ で与えられる. このとき, スピン変数の平均値$m =< s >$をT, Bの関数として求めよ.

ii) 多くのスピンからなる系の秩序-無秩序相転移の問題を考えよう. いま, 一つのスピン当り, z個の他のスピンと相互作用しているとし, その各ペアー(例えばスピンiとスピンj)の相互作用エネルギー$e_{i,j}$が, $e_{i,j} = -Js_is_j \ (J > 0)$ と表わせるとする. 分子場近似のもとで,

a) スピン変数の平均値mに対するself-consistentな方程式を導け.

b) またこの結果に基づき, この系で生起する相転移の相図$m = m(T)$を示せ.

確率過程

直線上を運動するブラウン粒子の時刻tにおけ位置を$x(t)$と表わすとき, $x(t)$は次のランジェバン方程式で記述されるとしよう.

$dx(t)/dt = -kx(t) + F(t)$.

ここで, ノイズ$F(t)$は平均値ゼロのガウス白色雑音であり, $< F(t) >= 0$, $< F(t)F(t') >= 2T\delta(t-t')$ の性質を満たす. またk, Tは正の定数である. 以下の問いに答えよ.

i) $p(x,t)$を$x(t)$の分布関数とするとき, $p(x,t)$の時間変化を支配するフォッカープランク方程式を導け.

ii) 体系の、時間に依存する自由エネルギー$A(t)$を

$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dxp(x,t)[kx^2/2 + T\ln p(x,t)]$

と定義するとき,$A(t)$が時間経過とともに非増大な関数, すなわち$dA(t)/dt \leq 0$, であることを示せ. 但し分布関数は遠方で十分早くゼロに漸近するとしてよい.

iii) 任意の初期条件からスタートしたときに, 十分な時間の経過後実現される平衡分布を求めよ.

力学系数学

$\boxed{6}$

$\mathbf{R}^n$ において次の微分方程式を考える．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} - \frac{\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

ただし, A は $n \times n$ 実対称行列で, $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ は標準内積を表す．また, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}$ でノルムを表す．以下の問いに答えよ。

(i) $\|\boldsymbol{x}\|^2$ はこの微分方程式の保存量（解に沿って一定値をとる関数）であることを示せ.

(ii) この微分方程式の解を $\boldsymbol{x}(t) = c(t)e^{tA}\boldsymbol{\xi}$ の形で求めよ．ただし, $c(t)$ はスカラー関数で, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n$ は定ベクトルである．初期条件は $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$, $c(0) = 1$ とする.

(iii) A の固有値はすべて相異なるとする．特別な初期ベクトルの場合を除いて, 一般に $t \to \infty$ のとき, 解 $\boldsymbol{x}(t)$ は A の最大固有値に対応する固有ベクトルに収束することを証明せよ．また, 特別な初期ベクトルとはどのような初期ベクトルか.