基礎数学 I

$\boxed{1}$

関数

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \qquad (x > 0)$$

について以下の問いに答えよ.

(i) 微分方程式

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) - \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

の解 $f(x)$ を関数 $\mathrm{Ei}(x)$ を用いて表せ.

(ii) 任意の自然数 n について以下が成り立つことを示せ.

$$\frac{d^n \mathrm{Ei}(x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} \int_0^x e^{-t} t^{n-1}\, dt$$

(iii) 以下が成り立つことを示せ.

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty e^{-t} \log t\, dt - e^{-x} \log x$$

(iv) 積分

$$\int_0^\infty e^{-t} \log t\, dt$$

が存在することを示せ.

(v) $g(x) = \log x + \mathrm{Ei}(x)$（ただし $x > 0$）とおくとき，極限

$$\lim_{x\to 0+} g(x)$$

が存在することを示せ.