# 線形計画

$\boxed{3}$

次の線形計画問題 (P) を考える．

$$
\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^\top$ は変数ベクトル，$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^\top$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^\top$, $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_m)^\top$ は定数ベクトルであり, $^\top$ は転置記号を表す.

ベクトル $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{d}$ の成分はすべて正であり，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成分はすべて非零であると仮定する．さらに，$\mathcal{I} = \{i \mid a_i > 0\}$, $\bar{\mathcal{I}} = \{i \mid a_i < 0\}$, $\mathcal{J} = \{j \mid b_j > 0\}$, $\bar{\mathcal{J}} = \{j \mid b_j < 0\}$ と表す.

以下の問 **(i)**, **(ii)**, **(iii)**, **(iv)** に答えよ.

**(i)** 問題 (P) の双対問題 (D) を書け.

**(ii)** $\mathcal{J} \neq \emptyset$ かつ $\bar{\mathcal{J}} \neq \emptyset$ ならば，双対問題 (D) は実行可能解をもたないことを示せ.

**(iii)** $\bar{\mathcal{J}} = \emptyset$ のとき，問題 (P) が最適解をもつための必要十分条件は

$$
\mathcal{I} \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad \max_{1 \leqq j \leqq m} \frac{d_j}{b_j} \leqq \min_{i \in \mathcal{I}} \frac{c_i}{a_i}
$$

であることを示せ．さらに，そのときの問題 (P) の最小値を求めよ.

**(iv)** $\mathcal{J} = \emptyset$ のとき，問題 (P) が最適解をもつための必要十分条件を与えよ．さらに，そのときの問題 (P) の最小値を求めよ.