基礎力学

$\boxed{5}$

時刻 $t=0$ に，質量 m の燃料を積んだロケット (燃料を除いた質量は M_0) が静止している．ロケットは，時刻 $t=0$ から，単位時間あたり質量 ρ(定数) の燃料を，ロケットから後方に相対的な速さ u(正の定数) で噴射しはじめ，一つの直線上を進むものとする．

(i) 最初に，外力が作用していない場合を考える．時刻 t で，燃料を含むロケットの質量は M，ロケットの速度は V であった．微小時間 δt だけ経過した時刻 $t+\delta t$ のときに質量，速度はそれぞれ微小に変化し，$M-\delta M$，$V+\delta V$ となったとする．この微小時間 δt の間に，質量 δM の燃料が，ロケットから後方に相対的な速さ u で噴射される．ロケットと燃料の運動量の和の保存則 (運動量の和が時刻 t と $t+\delta t$ で同じ) を書き下せ．

(ii) 外力が作用していない場合に (i) で求めた保存則で，２次の微小量を無視し，両辺を δt で割り，$\delta t \to 0$ の極限をとって微分方程式を書き下し，方程式を解き，すべての燃料を噴射し終えたあとのロケットの速度を求めよ．

(iii) 次に，速度に比例する抵抗力 (比例係数を γ とする．) が作用する場合を考える．この場合にも (i) と同様に考えると，２つの時刻 t と $t+\delta t$ の間での全運動量の変化はその間の抵抗力による力積に等しいことより関係式を書き下し，$\delta t \to 0$ の極限をとって微分方程式を求め，方程式を解いてすべての燃料を噴出し終えた時刻でのロケットの速度を求めよ．