基礎数学 II

$\boxed{6}$

A, B はともに $n \times n$ 実行列であるとする．A, B の列ベクトルをそれぞれ左から順に $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, および $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ とする．$\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{b}_j$ との標準内積を $g_{ij} := \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{b}_j$ とおき，g_{ij} を (i, j) 成分とする $n \times n$ 行列を G と書く．ただし，^{T} は転置作用素である．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) A, B がともに直交行列であるとき，G もまた直交行列となることを証明せよ．

(ii) A, B は直交行列とは仮定しないで，$A = B$ のとき，$\det G \geq 0$ を示せ．ただし，$\det$ は行列式を表す記号である．

(iii) A, B は正則行列で，$n = 3$ かつ $A = B$ のとき，$\sqrt{\det G}$ は，$\mathbf{R}^3$ においてベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を稜とする平行６面体の体積を表すことを示せ．

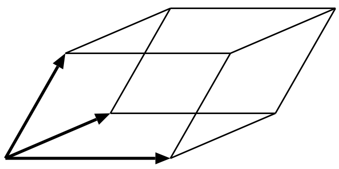

Figure 1: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を稜とする平行６面体

(iv) $1 \leq r \leq n$ なる整数 r に対し，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立であるための必要十分条件は

$$\det G_r > 0$$

であることを示せ．ただし，G_r は $g'_{ij} := \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$ を (i, j) 成分とする $r \times r$ 行列である．