

応用数学

1

複素平面 \mathbb{C} において，実軸上の閉区間 $[-1, 1]$ を含む単連結領域 D を考える． D 内の反時計回りに向き付けられた単純閉曲線 C で， C を境界とする有界領域に $[-1, 1]$ が含まれるものを考える（図を参照せよ）． $f(z)$ を D 上で正則な関数とするととき，以下の問いに答えよ．

- (i) n 個の任意の実数 $A_k (k = 1, \dots, n)$ と， $-1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1$ を満たすような任意の実数 $a_k (k = 1, \dots, n)$ に対して，

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - a_k} \right) f(z) dz = \sum_{k=1}^n A_k f(a_k)$$

を示せ．

- (ii) $z \notin [-1, 1]$ なる任意の複素数 z に対して，

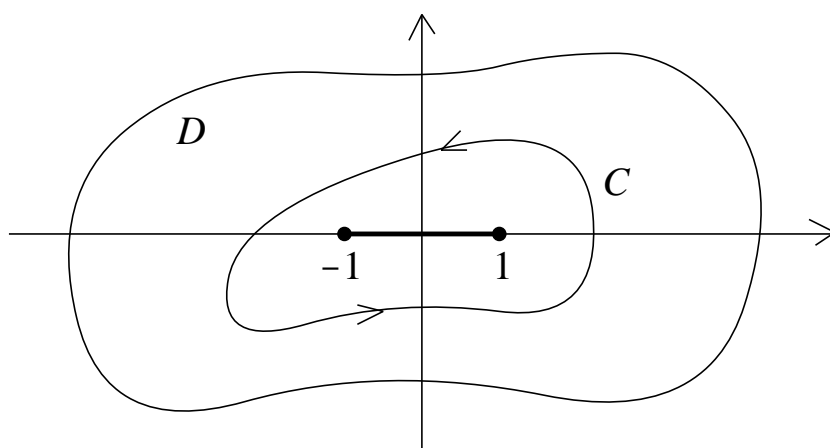
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{z - x} dx = \text{Log} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)$$

を示せ．ただし， $\text{Log} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)$ は， $z = x > 1$ のときに実数値となるように対数関数の分枝を選んだものである．

- (iii) 以下の等式を示せ．

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \text{Log} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right) f(z) dz = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

注：領域とは連結開集合のことをいう．



図