オペレーションズリサーチ

数理計画

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

次の非線形計画問題 (P) を考える．

$$
\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & c_i(\boldsymbol{x}) \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \end{array}
$$

ただし，$f : I\!R^n \to I\!R$ は 2 回連続的微分可能な凸関数，$c_i : I\!R^n \to I\!R$ $(i = 1, \ldots, m)$ はすべて 2 回連続的微分可能な凹関数とする[1]．さらに，狭義の不等式 $c_i(\boldsymbol{x}) > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ を満たす実行可能解の集合 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \mid c_i(\boldsymbol{x}) > 0 \ (i = 1, \ldots, m)\}$ は空でないと仮定する．

この問題 (P) に対して，関数 $F_r : \Omega \to I\!R$ を次式で定義する．

$$
F_r(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - r \sum_{i=1}^{m} \log(c_i(\boldsymbol{x}))
$$

ただし，r は正のパラメータ，log は自然対数を表す．

以下の問 **(i)**, **(ii)** に答えよ．

(i) 関数 F_r は凸関数であることを示せ．

(ii) $\{r_k\}$ を 0 に収束する正数列とし，各 r_k に対して関数 F_{r_k} は停留点 $\boldsymbol{x}^k \in \Omega$ をもつものとする．そのとき，$\{\boldsymbol{x}^k\}$ および $\left\{\dfrac{r_k}{c_i(\boldsymbol{x}^k)}\right\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ が有界ならば，点列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ の任意の集積点 $\boldsymbol{x}^*$ は問題 (P) の最適解であることを示せ．

---

[1] 関数 c_i が凹関数であるとは，関数 $-c_i$ が凸関数であることである．

オペレーションズリサーチ

待ち行列

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて２問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

以下のような単一サーバ待ち行列システムを考える．客は率 $\lambda\ (>0)$ のポワソン過程に従いシステムに到着し，先着順でサービスを受ける．サーバは低速モード，高速モードという二つの状態のいずれかをとる．低速モードのサーバは率 $\mu_1\ (\geq 0)$ でサービスを行う．低速モードにおいて系内客数が $N+1$ 人以上になれば，サーバは高速モードに切り替わる．高速モードのサーバーは率 $\mu_2\ (>0)$ でサービスを行い，システムが空になった時点で低速モードに切り替わる．このシステムの系内客数過程は連続時間マルコフ連鎖で記述でき，遷移速度図は図１で与えられる．

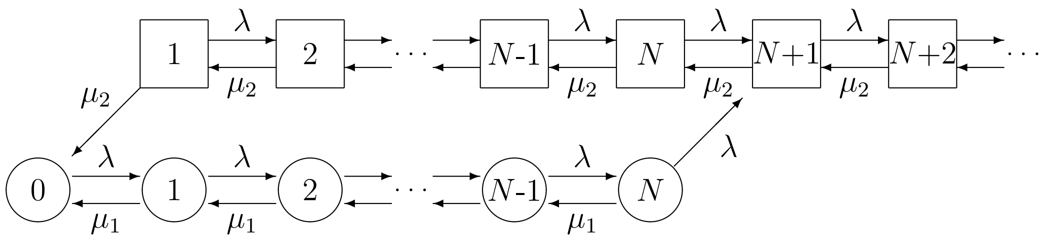

図 1: 遷移速度図

ここで○で囲まれた数字は低速モードにおける系内客数を表し，□で囲まれた数字は高速モードにおける系内客数を表している．以下では，システムが定常状態にあると仮定する．サーバが低速モードにあり，かつ，系内客数が i 人（$i=0,1,\ldots,N$）である定常状態確率を p_i，サーバが高速モードにあり，かつ，系内客数が i 人（$i=1,2,\ldots$）である定常状態確率を q_i として，(i) から (v) の問いに答えよ．

(i) $\lambda p_N = \mu_2 q_1$ を示せ．

(ii) $\rho = \lambda/\mu_2 \neq 1$ とする．q_i（$i=2,3,\ldots$）を q_1 を用いて表せ．

(iii) $\gamma = \mu_1/\lambda \neq 1$ とする．p_i（$i=0,1,\ldots,N-1$）を p_N を用いて表せ．

(iv) 定常状態確率が存在するための必要条件を与え，p_N を求めよ．

(v) $\mu_1 = 0$（すなわち $\gamma = 0$）とする．サーバが低速モードから高速モードに切り替わってから，低速モードに戻った後，再び高速モードに切り替わるまでの平均時間 T を求めよ．