

物理統計学

5 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ。

平衡統計力学

スピンからなる系の平衡状態の性質について考える。各スピン変数は1あるいは-1の値を取るものとする。またボルツマン定数は1, 体系の温度は T とし, カノニカル分布則が成り立つものとする。以下の問いに答えよ。

- i) 一つのスピンの、外部磁場 B の中に置かれている。この系のエネルギー E はスピン変数 s を用いて、 $E = -sB$ で与えられる。このとき、スピン変数の平均値 $m = \langle s \rangle$ を T, B の関数として求めよ。
- ii) 多くのスピンからなる系の秩序-無秩序相転移の問題を考えよう。いま、一つのスピン当り、 z 個の他のスピンと相互作用していると、その各ペア (例えばスピン i とスピン j) の相互作用エネルギー $e_{i,j}$ が、 $e_{i,j} = -Js_i s_j$ ($J > 0$) と表わせるとする。分子場近似のもとで、
 - a) スピン変数の平均値 m に対する self-consistent な方程式を導け。
 - b) またこの結果に基づき、この系で生起する相転移の相図 $m = m(T)$ を示せ。

確率過程

直線上を運動するブラウン粒子の時刻 t における位置を $x(t)$ と表わすとき、 $x(t)$ は次のランジェバン方程式で記述されるとしよう。

$$dx(t)/dt = -kx(t) + F(t).$$

ここで、ノイズ $F(t)$ は平均値ゼロのガウス白色雑音であり、 $\langle F(t) \rangle = 0$, $\langle F(t)F(t') \rangle = 2T\delta(t-t')$ の性質を満たす。また k, T は正の定数である。以下の問いに答えよ。

- i) $p(x, t)$ を $x(t)$ の分布関数とすると、 $p(x, t)$ の時間変化を支配するフォッカー-プランク方程式を導け。
- ii) 体系の、時間に依存する自由エネルギー $A(t)$ を
$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, t) [kx^2/2 + T \ln p(x, t)]$$
と定義するとき、 $A(t)$ が時間経過とともに非増大な関数、すなわち $dA(t)/dt \leq 0$, であることを示せ。但し分布関数は遠方で十分早くゼロに漸近するとしてよい。
- iii) 任意の初期条件からスタートしたときに、十分な時間の経過後実現される平衡分布を求めよ。