力学系数学

$\boxed{6}$

$\mathbf{R}^n$ において次の微分方程式を考える．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} - \frac{\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

ただし, A は $n \times n$ 実対称行列で, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は標準内積を表す．また, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ でノルムを表す．以下の問いに答えよ。

(i) $\|\boldsymbol{x}\|^2$ はこの微分方程式の保存量（解に沿って一定値をとる関数）であることを示せ.

(ii) この微分方程式の解を $\boldsymbol{x}(t) = c(t)e^{tA}\boldsymbol{\xi}$ の形で求めよ．ただし, $c(t)$ はスカラー関数で, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n$ は定ベクトルである．初期条件は $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$, $c(0) = 1$ とする.

(iii) A の固有値はすべて相異なるとする．特別な初期ベクトルの場合を除いて, 一般に $t \to \infty$ のとき, 解 $\boldsymbol{x}(t)$ は A の最大固有値に対応する固有ベクトルに収束することを証明せよ．また, 特別な初期ベクトルとはどのような初期ベクトルか.