平成１６年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
数理工学専攻
第２次入学者選抜試験
試験問題

基礎科目

試験日時：平成１６年２月１６日、午後１時００分より３時００分まで。

選択科目：基礎数学 I、アルゴリズム基礎、線形計画、線形制御理論、基礎力学、基礎数学 II

注意：(1) 上記科目から２科目選択すること。３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。

(2) 解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。

(3) 解答用紙は問題毎に回収する。
問題用紙及び計算用紙は持ち帰ること。

基礎数学 I

1

関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a,b]$ を含むある開区間で C^2 級とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) 次の積分の値を求めよ．

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

(ii) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ に対して

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

が成り立つことを用いて，次式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{3}$$

(iii) 次式が成立することを示せ．

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}\Bigl(f(a) + f(b)\Bigr) = -\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)dx \tag{4}$$

(iv) $|f''(x)| \leq M$ ならば，$a_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)\right) \tag{5}$$

とすると

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f(x)dx - T_n\right) = 0 \tag{6}$$

であることを示せ．ただし，$a < b$ とする．

(v) (6) 式において $a = 1, b = 2, f(x) = \log x$ とし，さらに (3) 式を用いることにより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi}}{n!} = 1 \tag{7}$$

を示せ．

アルゴリズム基礎

2

それぞれ n 個の整数要素をもつ m 配列 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ を考え、A_i の第 j 要素を a_{ij} と記す。なお、各配列 A_i はすべてあらかじめ整列されていると仮定する。ここで n 要素

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

を定義し、それらの中で、与えられた定数 c に最も近い要素 b_{j^*} を一つ求めたい。つまり、次式が成立する。

$$b_{j^*} = \min_j |b_j - c|.$$

(a) あらかじめ $b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ を要素とする配列 B を作ったのち上記の b_{j^*} を求めるとして、そのアルゴリズムと必要な時間量を述べよ。

(b) b_{j^*} を求めるために配列 B を作る必要は必ずしもないことに着目して、より高速なアルゴリズムを作り、その時間量も与えよ。

線形計画

3

次の問 [1] と [2] に答えよ.

[1] 次の線形計画問題を考える.

$$\begin{array}{lll} \text{(P)}: & \text{minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 係数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである.

(i) 問題 (P) の双対問題を書け.

(ii) 問題 (P) において係数ベクトル $\boldsymbol{b}$ のみを別の定数ベクトル $\boldsymbol{b}'$ で置き換えた問題 (P’) を考える．もし問題 (P) の双対問題が実行可能解をもつならば，問題 (P’) は最適解をもつか，または問題 (P’) には実行可能解が存在しないかのどちらかであることを示せ.

(iii) 問題 (P) において，$m = n$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$ が成り立っているとする.（$^\top$ は転置を表す.）そのとき，問題 (P) に $\boldsymbol{A}x^* = \boldsymbol{b}$ を満たす実行可能解 $\boldsymbol{x}^*$ が存在すれば，その実行可能解 $\boldsymbol{x}^*$ は問題 (P) の最適解であることを示せ.

[2] 次のパラメータを含む線形計画問題を考える.

$$\begin{array}{lll} \text{P}(\boldsymbol{w}): & \text{maximize} & \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 係数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{D}$ は $p \times n$ 係数行列，$\boldsymbol{w}$ は p 次元パラメータベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである．問題 P($\boldsymbol{w}$) は任意の $\boldsymbol{w}$ に対して最適解をもつと仮定し，目的関数の最大値をパラメータ $\boldsymbol{w}$ の関数として $f(\boldsymbol{w})$ と表す．そのとき，$f(\boldsymbol{w})$ は凸関数になることを示せ.

線形制御理論

$\boxed{4}$

(i) 次の伝達関数について, 以下の問に答えよ.

$$G(s) = \frac{(s+4)(1-s)}{(s+2)(s+1)^2}$$

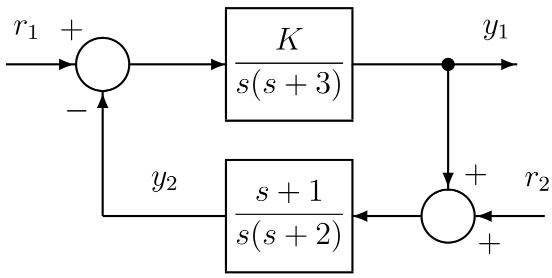
(a) $G(s)$ のインパルス応答 $g(t)$, ステップ応答 $g_{-1}(t)$ を計算せよ.

(b) ラプラス変換の初期値, 最終値定理を用いて, 次の値を計算せよ。

$$g(0+), \quad g_{-1}(0+); \quad g(\infty), \quad g_{-1}(\infty)$$

(c) 上に求めたステップ応答 $g_{-1}(t)$ の時間波形の概略図を描け.

(ii) 図のフィードバック制御系について, 下の問に答えよ.



(a) フィードバック制御系が安定となるための K の満たすべき条件を求めよ.

(b) $0 \leq K < \infty$ をパラメータとして, $1 + G_1(s)G_2(s) = 0$ の根軌跡を描け.

基礎力学

5

球形の水滴 (密度 μ) が一様な密度 ν の水蒸気中を、重力によって自然落下していくとき、水滴自身が掃いた (水滴が通過した) 場所に存在している水蒸気をすべて自分自身に取り込み，質量を増しながら加速していく場合を考える。このとき，水滴は水蒸気を取り込んでも，一様な密度 μ の球形を常に保つものとし，水蒸気による抵抗力及び浮力は無視できるとする。初期 (時刻 $t = 0$) に水滴の半径は a_0，速度は 0 であるとし，以下の問いに答えよ。(重力加速度の大きさを g とする。)

(i) 時刻 t において水滴の質量は M、速度は V (鉛直下向を正とする) で，微少な時間 δt だけ経過した時刻 $t + \delta t$ のときに質量、速度はそれぞれ微少に変化し、$M + \delta M$、$V + \delta V$ となるとする。2つの時刻の間での系の全運動量の変化はその間の重力による力積に等しいことより関係式を書き下し、$\delta t \to 0$ の極限をとって運動方程式を求めよ。

(ii) 水滴の質量 M の時間微分を水滴の速度 V を用いて表し，それより，水滴の半径 a の時間微分を求めよ。

(iii) (i) と (ii) で求めた2つの式を用いて、十分時間が経過したあとの水滴の加速度を求めよ。

基礎数学 II

$\boxed{6}$

$D(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ を各 $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, \cdots, n$, について線形な実数値関数で, 任意の $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j$ (ただし, $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, n$) の入れ替えに対して反対称であり, 特に $\mathbf{R}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \cdots, n$, に対して, $D(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ となるものする. このとき, $n \times n$ 実行列 A の列ベクトルを左から順に $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \cdots, n$, とすると, $\det A = D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ が成立つ. ただし, $\det A = |A|$ は行列 A の行列式を表す. ($\boldsymbol{a}_i$ が行ベクトルであっても同じ等式が成立つ.)

(i) $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $t \in \mathbf{R}$ について微分可能な $\mathbf{R}^n$-値関数とするとき, 次式を示せ.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} D(\boldsymbol{x}_1(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)) \\ = \ & D(\frac{d\boldsymbol{x}_1(t)}{dt}, \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)) + D(\boldsymbol{x}_1(t), \frac{d\boldsymbol{x}_2(t)}{dt}, \boldsymbol{x}_3(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)) \\ & + \cdots + D(\boldsymbol{x}_1(t), \cdots, \boldsymbol{x}_{n-1}(t), \frac{d\boldsymbol{x}_n(t)}{dt}) \end{aligned}$$

(ii) $\mathbf{R}^3$ において, 同一平面上にない相異なる 4 点 (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \cdots, 4$, を通る球面の方程式は次式で与えられることを示せ. ただし, x, y, z は $\mathbf{R}^3$ のデカルト座標で, 次式の左辺は行列式である.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(iii) (ii) にいう球面上の 1 点 (a, b, c) における接平面の方程式は次式で与えられることを示せ.

$$\begin{vmatrix} 2ax-a^2+2by-b^2+2cz-c^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

平成１６年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
数理工学専攻
第２次入学者選抜試験
試験問題

専門科目

試験日時：平成１６年２月１６日、午後３時１５分より５時１５分まで。

選択科目：応用数学、グラフ理論、オペレーションズリサーチ、現代制御論、
物理統計学、力学系数学

注意：(1) 上記科目から２科目選択すること。３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。

(2) 解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。

(3) 解答用紙は問題毎に回収する。
問題用紙及び計算用紙は持ち帰ること。

応用数学

$\boxed{1}$

以下の問いに答えよ．

(i) 点 $z = a$ は複素関数

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

の 1 位の極であるとする．さらに，$g(z)$ は $z = a$ で正則，$g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$,
$h'(a) \neq 0$ とする．このとき $z = a$ における $f(z)$ の留数は

$$\frac{g(a)}{h'(a)}$$

で与えられることを示せ．

(ii) 複素数平面全体で定義された関数

$$F(z) = \frac{1}{3e^{iz} - 2\cos z}$$

の特異点をすべて求めよ．

(iii) (ii) の関数 $F(z)$ について積分

$$I = \int_C F(z)dz$$

を求めよ．ここに $C = \{z||z| = 1\}$ は単位円である．

グラフ理論

$\boxed{2}$

単純無向グラフ G には $n\ (\geq 3)$ 個の節点があるとする. また, 節点 v に接続する枝の数 (すなわち次数) を $d(v)$ で表す. 隣接していない任意の 2 節点 v と w について $d(v) + d(w) \geq n$ が成り立つとき, G はハミルトン閉路を持つことを証明せよ. なお, ハミルトン閉路とは, n 個の節点すべてをそれぞれちょうど一度づつ通る閉路である.

ヒント: 背理法を用いる. その際, 枝をあと一本付け加えるとハミルトン閉路ができてしまうようなグラフを考えよ.

オペレーションズリサーチ

数理計画

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている．
どちらか一方を選択せよ．

次の非線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}: \quad & \text{Minimize} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \le s
\end{aligned}
$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ 係数行列，$\boldsymbol{c}$ は n 次元係数ベクトル，s は定数，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトル，$^\top$ は転置記号である．さらに，行列 $\boldsymbol{A}$ は正定値対称，定数 s は正であると仮定する．

(i) 問題 (P) に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす点を計算せよ．

(ii) 問 (i) において得られた点は問題 (P) の最適解であるか否かを答えよ．また，その理由を述べよ．

(iii) 問題 (P) において定数 s をパラメータとみなし，最適解を $\boldsymbol{x}(s)$ と表す．そのとき，目的関数の最小値を s の関数として $f(s) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(s)$ とおいたとき，$f(s)$ は定義域 $s > 0$ において凸関数であることを示せ．

オペレーションズリサーチ

待ち行列

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて2問出題されている．どちらか一方を選択せよ．

安定な先着順サービス GI/GI/1 待ち行列を考える．客の到着間隔の平均，分散をそれぞれ $E[A]$，$\mathrm{Var}[A]$ とし，客のサービス時間の平均，分散をそれぞれ $E[S]$，$\mathrm{Var}[S]$ とする．この待ち行列の平均到着率 λ は $1/E[A]$ で与えられ，安定であるという仮定から利用率 $\rho = \lambda E[S]$ は $\rho < 1$ を満たす．さらに，W_n を n 番目の客の待ち時間，S_n を n 番目の客のサービス時間，A_{n+1} を n 番目と $n+1$ 番目の客の到着時間間隔とすると

$$W_{n+1} = \max(0, W_n - A_{n+1} + S_n)$$

が成立する．$U_n = A_{n+1} - S_n$ として，問 (i) から問 (v) に答えよ．

(i) $X_n = -\min(0, W_n - U_n)$ としたとき，W_{n+1} を W_n，U_n，X_n を用いて表せ．

(ii) 定常状態における待ち時間を W とする．また，U を U_n と同じ分布に従う確率変数とし，$X = -\min(0, W - U)$ とする．問 (i) で得られた等式を利用して，$E[U] = E[X]$ を示せ．

(iii) さらに，$(W_{n+1} - X_n)^2$ の定常状態における期待値を考えることにより

$$E[W] = \frac{E[X^2] + E[U^2]}{2E[U]}$$

を導け．

(iv) 定常状態におけるアイドル期間長を I とする．このとき，$E[I]$ を $\Pr(W = 0)$ と $E[X]$ を用いて表せ．さらに $E[I^2]$ を $\Pr(W = 0)$ と $E[X^2]$ を用いて表せ．

(v) $E[W]$ を アイドル期間長 I の平均，2次積率ならびに U の平均，2次積率を用いて表せ．

現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0$$

で表されるシステムを考える．ここに，$x(t)$ と $u(t)$ は，それぞれ時刻 t における状態ベクトルおよび入力ベクトルである．また，A と B は適当な次元の定数行列である．

(i) このシステムの可制御性の定義を, $x(t)$, $u(t)$ および x_0 を用いて述べよ.

(ii) 行列 A と B が以下で与えられるとき，システムの可制御性を判定せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) 行列 A と B が以下で与えられるとき，システムが可制御であるために $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ および b_3 が満たすべき条件 (必要十分条件) を導出せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ a_2 & 1 & a_1 \\ 0 & a_2 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(iv) 行列 A と B が (ii) で与えられた値をもつとき，$A + BK$ の固有値を $\{-2, -2, -2\}$ とするゲイン $K = (k_1\ \ k_2\ \ k_3)$ を求めよ.

物理統計学

$\boxed{5}$ 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ.

平衡統計力学

（i）カノニカル分布を用いて定積比熱C_vを計算するための手順を記述せよ。

(ii）単原子からなる理想気体を古典的に扱って、この系の定積比熱C_vを 計算せよ。

確率過程

（i）1次元の空間（直線）上を、各ステップ左右等確率（各々1/2）で距離aだけ移動するランダムウオークの問題を考える。
原点から出発したとして、N ステップ後(すなわち、時刻$t = N\tau$)の位置の 分布を求めよ。ただしτは1ステップに要する時間を表す。

（ii）上の問題に対して、a, τに関する適当な極限操作をとり、ランダムウオークを記述する拡散方程式を導出せよ。

力学系数学

$\boxed{6}$

nを3以上の自然数とし，$\mathbf{R}^n$上の1階常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{8}$$

を考える．ただし$x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ (^{T}は転置を表す）は$\mathbf{R}^n$のデカルト座標で，$f(x)$は$\mathbf{R}^n$上でC^∞級のn次実ベクトル値関数である．n次直交行列のなす群を$O(n)$で表すとき，fは

$$f(gx) = g\,f(x) \qquad ({}^\forall g \in O(n),\ {}^\forall x \in \mathbf{R}^n) \tag{9}$$

を満たすとする．以下の問い(i)から(iii)に答えよ．

(i) 原点$x = 0$は，(8)の平衡点であることを示せ．

(ii) 原点$x = 0$における(8)の線形化方程式を

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{10}$$

で表すとき，n次実行列Aは任意の直交行列gと可換であること，すなわち

$$Ag = gA \qquad ({}^\forall g \in O(n)) \tag{11}$$

が成立することを示せ．

(iii) (8)は，任意の初期条件に対して一意的な時間大域解を持つと仮定する．このとき，$\operatorname{trace} A < 0$ならば原点$x = 0$は(8)の漸近安定平衡点であり，$\operatorname{trace} A > 0$ならば不安定平衡点であることを示せ．