基礎数学 I

$\boxed{1}$

関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a,b]$ を含むある開区間で C^2 級とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) 次の積分の値を求めよ．

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

(ii) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ に対して

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

が成り立つことを用いて，次式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{3}$$

(iii) 次式が成立することを示せ．

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big) = -\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)dx \tag{4}$$

(iv) $|f''(x)| \leq M$ ならば，$a_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)\right) \tag{5}$$

とすると

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f(x)dx - T_n\right) = 0 \tag{6}$$

であることを示せ．ただし，$a < b$ とする．

(v) (6) 式において $a = 1, b = 2, f(x) = \log x$ とし，さらに (3) 式を用いることにより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi}}{n!} = 1 \tag{7}$$

を示せ．