

線形計画

3

次の問 [1] と [2] に答えよ .

[1] 次の線形計画問題を考える .

$$(P) : \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

ただし , A は $m \times n$ 係数行列 , b は m 次元係数ベクトル , c は n 次元係数ベクトル , x は n 次元変数ベクトルである .

(i) 問題 (P) の双対問題を書け .

(ii) 問題 (P) において係数ベクトル b のみを別の定数ベクトル b' で置き換えた問題 (P') を考える . もし問題 (P) の双対問題が実行可能解をもつならば , 問題 (P') は最適解をもつか , または問題 (P') には実行可能解が存在しないかのどちらかであることを示せ .

(iii) 問題 (P) において , $m = n$, $b = c$, $A = A^\top$ が成り立っているとする ($^\top$ は転置を表す .) そのとき , 問題 (P) に $Ax^* = b$ を満たす実行可能解 x^* が存在すれば , その実行可能解 x^* は問題 (P) の最適解であることを示せ .

[2] 次のパラメータを含む線形計画問題を考える .

$$P(\mathbf{w}) : \begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{w}^\top \mathbf{Dx} \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

ただし , A は $m \times n$ 係数行列 , b は m 次元係数ベクトル , D は $p \times n$ 係数行列 , w は p 次元パラメータベクトル , x は n 次元変数ベクトルである . 問題 $P(w)$ は任意の w に対して最適解をもつと仮定し , 目的関数の最大値をパラメータ w の関数として $f(w)$ と表す . そのとき , $f(w)$ は凸関数になることを示せ .