基礎数学 II

$\boxed{6}$

$D(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ を各 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{R}^n$, $i=1,\cdots,n$, について線形な実数値関数で, 任意の $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_j$ (ただし, $i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n$) の入れ替えに対して反対称であり, 特に $\mathbf{R}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_i$, $i=1,\cdots,n$, に対して, $D(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=1$ となるものする. このとき, $n\times n$ 実行列 A の列ベクトルを左から順に $\boldsymbol{a}_i$, $i=1,\cdots,n$, とすると, $\det A=D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ が成立つ. ただし, $\det A=|A|$ は行列 A の行列式を表す. ($\boldsymbol{a}_i$ が行ベクトルであっても同じ等式が成立つ.)

(i) $\boldsymbol{x}_i(t)$ を $t\in\mathbf{R}$ について微分可能な $\mathbf{R}^n$-値関数とするとき, 次式を示せ.

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}D(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))\\ =\ &D(\frac{d\boldsymbol{x}_1(t)}{dt},\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))+D(\boldsymbol{x}_1(t),\frac{d\boldsymbol{x}_2(t)}{dt},\boldsymbol{x}_3(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))\\ &+\cdots+D(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1}(t),\frac{d\boldsymbol{x}_n(t)}{dt})\end{aligned}$$

(ii) $\mathbf{R}^3$ において, 同一平面上にない相異なる 4 点 (x_i,y_i,z_i), $i=1,\cdots,4$, を通る球面の方程式は次式で与えられることを示せ. ただし, x,y,z は $\mathbf{R}^3$ のデカルト座標で, 次式の左辺は行列式である.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1\\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=0$$

(iii) (ii) にいう球面上の 1 点 (a,b,c) における接平面の方程式は次式で与えられることを示せ.

$$\begin{vmatrix} 2ax-a^2+2by-b^2+2cz-c^2 & x & y & z & 1\\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=0$$