オペレーションズリサーチ

数理計画

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている．どちらか一方を選択せよ．

次の非線形計画問題 (P) を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} : & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \leq s \end{array}$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ 係数行列，$\boldsymbol{c}$ は n 次元係数ベクトル，s は定数，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトル，$^\top$ は転置記号である．さらに，行列 $\boldsymbol{A}$ は正定値対称，定数 s は正であると仮定する．

(i) 問題 (P) に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす点を計算せよ．

(ii) 問 (i) において得られた点は問題 (P) の最適解であるか否かを答えよ．また，その理由を述べよ．

(iii) 問題 (P) において定数 s をパラメータとみなし，最適解を $\boldsymbol{x}(s)$ と表す．そのとき，目的関数の最小値を s の関数として $f(s) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(s)$ とおいたとき，$f(s)$ は定義域 $s > 0$ において凸関数であることを示せ．

オペレーションズリサーチ

待ち行列

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている．どちらか一方を選択せよ．

安定な先着順サービス GI/GI/1 待ち行列を考える．客の到着間隔の平均，分散をそれぞれ $E[A]$，$\mathrm{Var}[A]$ とし，客のサービス時間の平均，分散をそれぞれ $E[S]$，$\mathrm{Var}[S]$ とする．この待ち行列の平均到着率 λ は $1/E[A]$ で与えられ，安定であるという仮定から利用率 $\rho = \lambda E[S]$ は $\rho < 1$ を満たす．さらに，W_n を n 番目の客の待ち時間，S_n を n 番目の客のサービス時間，A_{n+1} を n 番目と $n+1$ 番目の客の到着時間間隔とすると

$$W_{n+1} = \max(0, W_n - A_{n+1} + S_n)$$

が成立する．$U_n = A_{n+1} - S_n$ として，問 (i) から問 (v) に答えよ．

(i) $X_n = -\min(0, W_n - U_n)$ としたとき，W_{n+1} を W_n，U_n，X_n を用いて表せ．

(ii) 定常状態における待ち時間を W とする．また，U を U_n と同じ分布に従う確率変数とし，$X = -\min(0, W - U)$ とする．問 (i) で得られた等式を利用して，$E[U] = E[X]$ を示せ．

(iii) さらに，$(W_{n+1} - X_n)^2$ の定常状態における期待値を考えることにより

$$E[W] = \frac{E[X^2] + E[U^2]}{2E[U]}$$

を導け．

(iv) 定常状態におけるアイドル期間長を I とする．このとき，$E[I]$ を $\Pr(W = 0)$ と $E[X]$ を用いて表せ．さらに $E[I^2]$ を $\Pr(W = 0)$ と $E[X^2]$ を用いて表せ．

(v) $E[W]$ を アイドル期間長 I の平均，2 次積率ならびに U の平均，2 次積率を用いて表せ．