力学系数学

$\boxed{6}$

nを3以上の自然数とし，$\mathbf{R}^n$ 上の1階常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

を考える．ただし $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ (^{T} は転置を表す）は $\mathbf{R}^n$ のデカルト座標で，$f(x)$ は $\mathbf{R}^n$ 上で C^∞ 級の n 次実ベクトル値関数である．n 次直交行列のなす群を $O(n)$ で表すとき，f は

$$f(gx) = g\,f(x) \qquad ({}^\forall g \in O(n),\ {}^\forall x \in \mathbf{R}^n) \tag{2}$$

を満たすとする．以下の問い (i) から (iii) に答えよ．

(i) 原点 $x = 0$ は，(1) の平衡点であることを示せ．

(ii) 原点 $x = 0$ における (1) の線形化方程式を

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3}$$

で表すとき，n 次実行列 A は任意の直交行列 g と可換であること，すなわち

$$Ag = gA \qquad ({}^\forall g \in O(n)) \tag{4}$$

が成立することを示せ．

(iii) (1) は，任意の初期条件に対して一意的な時間大域解を持つと仮定する．このとき，$\mathrm{trace}\,A < 0$ ならば原点 $x = 0$ は (1) の漸近安定平衡点であり，$\mathrm{trace}\,A > 0$ ならば不安定平衡点であることを示せ．