平成１７年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
数理工学専攻
入学者選抜試験問題

基礎科目

試験日時：平成１６年８月８日、午後１時００分より３時００分まで。

選択科目：基礎数学 I、アルゴリズム基礎、線形計画、線形制御理論、基礎力学、基礎数学 II

注意：(1) 上記科目から２科目選択すること。３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。

(2) 解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。

(3) 解答用紙は問題ごとに回収する。
問題用紙は持ち帰ること。

基礎数学 I

$\boxed{1}$

x を区間 $[0,1]$ の実数，n を自然数，k を $0 \leq k \leq n$ なる整数，$\binom{n}{k}$ を 2 項係数とする．以下の問いに答えよ．

(i) 関係式

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

を用いて

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

を示せ．

(ii) 関数列

$$r_n(x) = {\sum_k}' \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を定義する．ただし，$\sum'_k$ は $k \in \{0, 1, \ldots, n\} \cap \{k \mid |k-nx| \geq n^{3/4}\}$ なる k についての和を表す．$1 \leq (k-nx)^2 n^{-3/2}$ を用いて，$r_n(x)$ は区間 $[0,1]$ において $n \to \infty$ で 0 に一様収束することを示せ．

(iii) $f(x)$ を区間 $[0,1]$ で定義された連続関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな n をとれば，区間 $[0,1]$ において

$${\sum_k}' |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ．

(iv) 連続関数 $f(x)$ は区間 $[0,1]$ で一様連続である．従って，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，x, y に無関係に n_0 を十分大きくとると，$|x-y| < n_0^{-1/4}$ について $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となるようにできる．このとき，十分大きな n をとれば

$${\sum_k}'' |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\sum''_k$ は $k \in \{0, 1, \ldots, n\} \cap \{k \mid |k-nx| < n^{3/4}\}$ なる k についての和を表す．

(v) $p_n(x)$ を

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

なる n 次多項式とする．$p_n(x)$ は区間 $[0,1]$ において $n \to \infty$ で $f(x)$ に一様収束することを証明せよ．

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

n 個の区間 $I_i = [a_i, b_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ が与えられるとき, 重なりを持つ区間の対をすべて列挙したい. なお, $[a_i, b_i]$ は実数の集合 $\{x \in \mathbf{R} \mid a_i \leq x \leq b_i\}$ を表し, 二つの区間 I_i と I_j が重なりを持つとは, $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j]$ が空集合でないことを意味する. 全ての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して a_i と b_i は整数で $a_i \leq b_i$ を満たし, また, 任意の i と j $(i \neq j)$ に対して $a_i \neq a_j$ を仮定する. 区間のデータは端の値 a_i と b_i が配列で与えられており, 二つの数の大小比較や四則演算などの基本操作は全て $\mathrm{O}(1)$ 時間で可能とする.

(i) 区間対全てに対してそれぞれ重なりの有無を調べて該当するものを列挙する方法が要する時間量を述べよ.

(ii) 重なりを持つ区間対の総数を k とするとき, そのような区間対を列挙する $\mathrm{O}(n \log n + k)$ 時間のアルゴリズムを与えよ.

(iii) 重なりを持つ区間対を列挙するのではなく, その総数 k のみを出力する $\mathrm{O}(n \log n)$ 時間のアルゴリズムを与えよ.

線形計画

$\boxed{3}$

次の線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)}: & \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}
\end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $n \times m$ 係数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである．ベクトルはすべて列ベクトルとし，$^\top$ は転置を表す．さらに，$m > n$ かつ $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ と仮定する．問題 (P) の双対問題は次のように書ける．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)}: & \text{minimize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} \\
& & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

以下の問 (i) – (iii) に答えよ．

(i) 問題 (P) の最適解の集合を $\mathcal{S}$ と書く．集合 $\mathcal{S}$ は凸集合であることを示せ．

(ii) 集合 $\mathcal{S}$ が有界でないときには，$\mathcal{S}$ に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{v} \in \mathcal{S} \quad \text{for all } \alpha > 0$$

となるような $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在することが知られている．この性質を用いて，集合 $\mathcal{S}$ が有界でないならば

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{0}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が存在することを示せ．

(iii) 問題 (D) において

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$$

を満たす実行可能解が存在するならば，集合 $\mathcal{S}$ は有界であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ はベクトル $\boldsymbol{y}$ のすべての成分が正であることを表す．

線形制御理論

$\boxed{4}$

図 1 および図 2 のフィードバック制御系において, $r(t)$, $d(t)$, $y(t)$ および $e(t)$ はそれぞれ時刻 t における目標値, 外乱, 出力および制御偏差を表し, $C(s)$ と $P(s)$ はプロパーな伝達関数である．また，a, b, K は定数である. 以下の問いに答えよ.

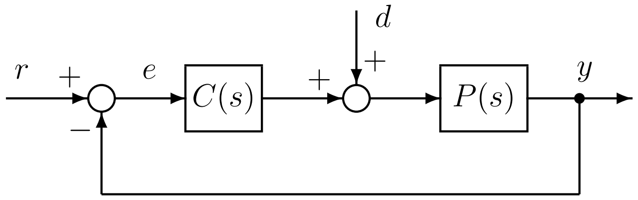


図 1

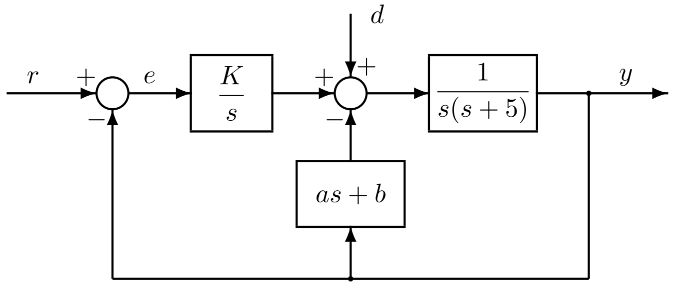


図 2

(i) 図 1 のフィードバック制御系が安定となるための必要十分条件を 1 つ述べよ. ただし，証明は不要である.

(ii) 図 2 の制御系を図 1 の制御系に等価変換して, $C(s)$ および $P(s)$ を求めよ. さらに図 2 のフィードバック制御系が安定となるために a, b, K が満足すべき条件を求めよ.

(iii) 図 2 の制御系において制御偏差 $e(t)$, 目標値 $r(t)$ および外乱 $d(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $\hat{e}(s)$, $\hat{r}(s)$ および $\hat{d}(s)$ とするとき，$\hat{e}(s)$ を $\hat{r}(s)$ と $\hat{d}(s)$ を用いて表せ. また $d(t) = 0,\ t \geq 0$ としたとき, ランプ目標値 $r(t) = t,\ t \geq 0$ に対する $e(t)$ の定常値を求めよ. この定常値を小さくするには, パラメータ a, b, K をどのような方針で選べばよいか？

(iv) 図 2 の制御系において, $r(t) = 0$, $d(t) = \sin t,\ t \geq 0$ とする. $t \to \infty$ における制御偏差 $e(t)$ の振幅を求めよ. (ヒント： 周波数応答を利用せよ.)

(v) 図 2 の制御系において, $b = 8$, $K = 4$ とする. このとき, 特性方程式を $1 + a\,G(s) = 0$ の形に変形せよ. これを利用して, パラメータ $a\,(\geq 0)$ を変化させた場合のフィードバック制御系の根軌跡を求めよ.

基礎力学

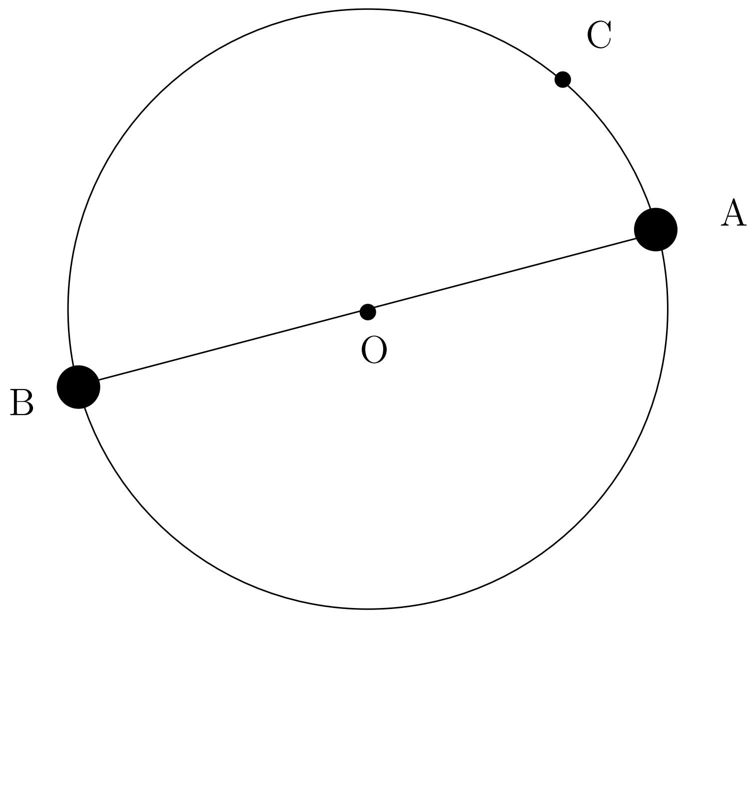
5

質量mの２つの質点Ａ，Ｂが，延び縮みしない，質量の無視できる長さ$2a$の糸で結ばれている。２つの質点は糸を真っ直ぐに張った状態で糸の中点Ｏを中心に，水平面上を真上からみて左回りに角速度ωで回転している。すなわち図に示すように，２つの質点は中心Ｏ半径aの円周上を運動している。質点と水平面との間の摩擦は無視できるものとして，次の問いに答えよ。

(i)　この系の全運動量，点Ｏのまわりの全角運動量，力学的全エネルギーを求めよ。

(ii)　２つの質点には糸の張力が働いているが，(i) で求めた全運動量，点Ｏのまわりの全角運動量，力学的全エネルギーはそれぞれ保存することを，運動方程式を用いて証明せよ。

(iii)　円周上に固定された点Ｃに，質点Ａが到達した時刻t_0から質点Ａは点Ｃにとどまり，もう一方の質点Ｂは糸が真っ直ぐ張ったままで点Ｃの回りに回転し始めたとする。このとき点Ｃにおいて摩擦は働かないものとする。運動が変化したとき点Ｃには衝撃力が働くが，この系の点Ｃのまわりの全角運動量は運動の変化の前後で保存されることを示し，運動の変化後の質点Ｂの角速度を求めよ。また力学的全エネルギーの変化を求めよ。



基礎数学 II

$\boxed{6}$

n 次実 3 重対角対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

を考える．ここで, $n \geq 2, b_i \neq 0\,(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ とする．このとき, 以下の問いに答えよ．ただし，実対称行列が対角化可能であることは用いてよい．

(i) 一般に，n 次実対称行列の固有値はすべて実数であることを示せ．

(ii) 一般に，n 次実対称行列の相異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交することを示せ．

(iii) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ を上で定義した行列 A の固有ベクトルとする．ここで $^{\mathrm{T}}$ は転置を意味する．このとき，$x_1 \neq 0$ かつ $x_n \neq 0$ であることを示せ．

(iv) 行列 A の固有値は, すべて相異なることを示せ．

(v) ベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}' = (y'_1, y'_2, \cdots, y'_n)^{\mathrm{T}}$ に対する内積を $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') = \sum_{i=1}^{n} y_i y'_i$ で定義する．固有値 $\lambda_k\,(k = 1, 2, \cdots, n)$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$ で表し，$(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(k)}) = 1$ とする．z を $z \neq \lambda_k$ なる任意の実数とする．このとき,

$$(\boldsymbol{e}_i, (A - zI)^{-1}\boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_i^{(k)} x_j^{(k)}}{\lambda_k - z}$$

を導け．ただし，$\boldsymbol{e}_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ は，第 i 成分が 1 で他の成分は 0 であるベクトルを表し，I は n 次単位行列を表す．

平成１７年度

京都大学大学院情報学研究科修士課程
数理工学専攻
入学者選抜試験問題

専門科目

試験日時：平成１６年８月８日、午後３時１５分より５時１５分まで。

選択科目：応用数学、グラフ理論、オペレーションズリサーチ、現代制御論、
物理統計学、力学系数学

注意：(1) 上記科目から２科目選択すること。３科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。

(2) 解答は１科目につき解答用紙１枚に記入すること。解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。

(3) 解答用紙は問題ごとに回収する。
問題用紙は持ち帰ること。

応用数学

1

複素数平面上の関数 f を, 原点以外の相異なる点 $b_k\,(k=1,2,\cdots)$ に 1 位の極を持つ有理形関数とする．任意の有界領域において，極は高々有限個しかないものとする．この f に対し，適当な正数列 $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ と正数 M が存在し，

- $r_n \le r_{n+1}, \qquad r_n \to \infty \quad (n \to +\infty)$
- 任意の n に対して円周 $\{z \mid |z| = r_n\}$ 上で $|f(z)| \le M$

が成り立つとする．このとき，以下の問いに答えよ．

1. C_r を原点を中心とした，反時計周りの向きをもつ半径 r の円周とする．C_r は関数 f の極 $b_k\,(k=1,2,\cdots)$ を通らないものとし，C_r の内側にある極を $b_{k_1}, b_{k_2}, \cdots, b_{k_N}$ とする．このとき C_r の内側の任意の点 $z(\neq b_{k_l})$ において

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \sum_{l=1}^{N}\frac{\mathrm{Res}f(b_{k_l})}{z - b_{k_l}}$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\mathrm{Res}f(b_{k_l})$ は関数 f の点 b_{k_l} における留数を表す．

2. 関数 f の部分分数展開

$$f(z) = f(0) + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Res}f(b_j)}{z - b_j} + \frac{\mathrm{Res}f(b_j)}{b_j}\right)$$

が成り立つことを示せ．

3. 関数 $g(z) = \cot z - \dfrac{1}{z}$ の部分分数展開を求めよ．

グラフ理論

$\boxed{2}$

有限集合 A に対しその要素数を $|A|$ と表す．単純無向グラフを以下では単にグラフと呼び，節点集合 V，枝集合 E からなるグラフを (V,E) と表す．２本の枝は少なくとも一つの端点を共有するとき隣接すると言う．グラフ $G=(V,E)$ の枝の部分集合 $M \subseteq E$ は，どの２本の枝 $e,e' \in M$ も隣接しないときマッチングと呼ばれる．$G=(V,E)$ のマッチング M は，どの枝 $e \in E-M$ を M に加えても $M \cup \{e\}$ がマッチングにならないとき極大と言う．

M' を G の任意の極大マッチングとし，M^* を本数 $|M^*|$ が最大である G のマッチングとする．以下の (i) から (iii) の問いに答えよ．

(i) M^* のどの枝 e に対しても，少なくとも１本の M' の枝が隣接することを説明せよ．

(ii) 常に $|M^*| \leq 2|M'|$ が成立することを証明せよ．

(iii) $|M^*|=4$，$|M'|=2$ なる M^*, M' を持つ連結なグラフ G の例を作成し，図示せよ（図中の枝に記号を $e_1, e_2, \ldots$ のように付し，M^*, M' に含まれる枝はこれらの記号を用いて示すこと）．

オペレーションズリサーチ

数理計画

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて２問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

次の非線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P):} & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) & \\
& \text{subject to} & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

ただし，$f : R^n \to R$ と $g_i : R^n \to R,\ i = 1, \ldots, m$ は連続的微分可能な凸関数である．

問題 (P) は狭義実行可能，つまり $g_i(\boldsymbol{x}^0) < 0,\ i = 1, \ldots, m$ となる点 $\boldsymbol{x}^0 \in R^n$ が存在すると仮定する．

以下の問 (i)–(iii) に答えよ．

(i) 一般に，関数 $h : R^n \to R$ が連続的微分可能な凸関数であれば，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$
h(\boldsymbol{x}) \geq h(\boldsymbol{y}) + \nabla h(\boldsymbol{y})^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})
$$

ここで $\nabla h(\boldsymbol{y})$ は関数 h の点 $\boldsymbol{y}$ における勾配ベクトル，$^\top$ はベクトルの転置を表す．

(ii) 固定された任意の点 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R^n$ に対して，次の凸２次計画問題 (Q) は実行可能解をもつことを示せ．

$$
\begin{array}{llll}
\text{(Q):} & \text{minimize} & \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{B} \boldsymbol{d} & \\
& \text{subject to} & g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{d} \leq 0, & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

ここで $\boldsymbol{B}$ は正定値対称な $n \times n$ 定数行列であり，問題 (Q) の決定変数は $\boldsymbol{d} \in R^n$ である．

(iii) 点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が問題 (P) の最適解であるための必要十分条件は $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ が問題 (Q) の最適解となることである．このことを示せ．

オペレーションズリサーチ

待ち行列

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

通常の待ち行列では，サービスを待っている客がいる時はサーバは必ずサービスを行い，システムが空の時のみ停止する．ここでは，サービスを待っている客がいる場合でも，サーバが停止する（休暇をとる）以下のような単一サーバシステムを考える．

システム内に客がいなくなると，サーバは待ち客数が N 人（$N \geq 1$）になるまで休暇をとる．N 人目の客が到着すると直ちにそれらの客に対して先着順でサービスを開始し，再びシステムが空になるまで連続してサービスを行い，空になると再び休暇をとるという動作を繰り返す．

このようなシステムにおいて，客の到着が率 λ のポワソン過程に従い，客のサービス時間が独立かつ同一な一般分布に従う場合を考える．サービス時間の分布関数を $B(x)$，そのラプラス・スティルチェス変換形を $B^*(s)$，平均を b として，(i) から (v) の問いに答えよ．

(i) A を客一人のサービス時間の間に新たに到着する客の数とする．A の確率母関数 $A(z)$ を λ と $B^*(s)$ を用いて表せ．

(ii) X_n を n 番目の客のサービスが終了した直後のシステム内客数とし，$p_{i,j} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$ と定義する．また，a_k を一人の客のサービス中に k 人の客が到着する確率とする．$i = 0$ と $i \geq 1$ の場合に分けて考えることにより，$p_{i,j}$ を a_k を用いて表せ．

(iii) システムが定常状態にあると仮定する．サービス終了直後のシステム内客数が k 人である定常確率を π_k としたとき，π_k の Z 変換

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$$

を，λ, N, $B^*(s)$ および π_0 を用いて表せ．

(iv) システムが定常状態にあるとの仮定の下で，π_0 を決定せよ．

(v) $\Pi(z)$ は定常状態における任意時点でのシステム内客数分布の確率母関数に等しい．その理由を述べよ．

現代制御論

$\boxed{4}$

3次の定係数常微分方程式

$$\frac{d^3y}{dt^3} + (a+1)\frac{d^2y}{dt^2} + (a-2)\frac{dy}{dt} - 2ay = \frac{du}{dt} + u$$

で表されるシステムを考える．ただし，スカラー値信号 u と y はそれぞれ入力と出力であり，a は実定数である．

(i) このシステムの状態空間モデルを導出せよ (導出過程も示せ)．ただし，状態ベクトルの次元は3次元とせよ．

(ii) (i) で得られた状態空間モデルの可制御性および可観測性を判別せよ．
さらに，この状態空間モデルが不可制御または不可観測となる a が存在するならば，そのようなすべての a に対してシステムの最小実現を求めよ．

物理統計学

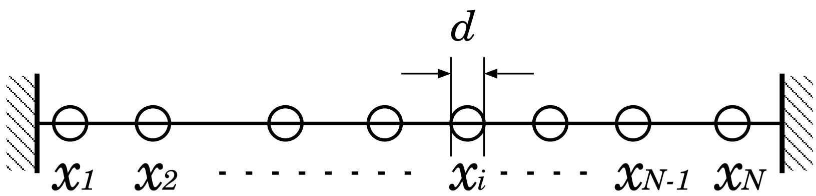
$\boxed{5}$ 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ.

平衡統計力学

図のように, 質量 m をもつ粒子が N 個 (各粒子は質点と考え, その位置座標を各々$x_1, x_2, ..., x_N$ とする）, 長さ L の線分 $(0 \leq x \leq L)$ 上を運動している. 粒子間には剛体球的な斥力が働いている. すなわち, 相互作用のポテンシャル v は, ２つの粒子間の距離を X として

$$v(X) = \infty (0 < X < d), \qquad v(X) = 0 (X > d). \tag{1}$$

また $x = 0$ と $x = L$ に存在する壁と粒子の間の剛体的な相互作用のため, $x_1 \geq d/2$, $x_N \leq L - d/2$ に注意する. ボルツマン定数を１, $L > Nd$ として, 以下の問に答えよ.



(i) T を体系の温度を表すとして, この系の分配関数 $Z(N, L, T)$ と自由エネルギー $F(N, L, T)$ を求めよ.

(ii) 体系の圧力 p を T, L, N を用いて表現する状態方程式を与え, L を変えたときの圧力 p の振舞を図示せよ.

物理統計学

$\boxed{5}$ 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ.

確率過程

ボールが全部で $2R$ 個あり、これらが２つの壷 A,B に分けて入っている. すなわち, 壷 A,B に入っているボールの数を各々$N_A(\geq 0), N_B(\geq 0)$ とすると, $N_A + N_B = 2R$. 各ボールには１から $2R$ の番号が重複なく付いているとする. さて１から $2R$ の間の１つの整数 J をランダムに, すなわち各々$1/(2R)$ の確率で選び, J という番号をもつボールを他の壷に移し換える. このステップを続けることにより生成される確率過程について, 以下の問に答えよ.

(i) 変数 I を $I = (N_A - N_B)/2$ で定義する. $(n+1)$ 回このステップを繰り返した直後の I の分布関数を $p(i, n+1)$ とする. これを $\{p(j,n)\}(j = -R, ..., -1, 0, 1, ..., R)$ を用いて表す, 差分方程式を導出せよ.

(ii) １ステップに要する時間を τ, 長さの次元をもつ量を a として, 時 $t = n\tau$, 位置座標 $X = Ia$ を導入する. 連続極限 $a \to 0, \tau \to 0, R \to \infty, a^2/(2\tau) \to D$(定数)$, R\tau \to 1/\gamma$(定数) を (i) で導いた差分方程式に適用し, オルンシュタイン−ウーレンベック過程を記述するフォッカープランク方程式を導け.

(iii) このフォッカープランク方程式に基づき, $t \to \infty$ のもとで実現される X の平衡分布を求めよ.

力学系数学

$\boxed{6}$

$M_n(\mathbf{R})$ で $n \times n$ 実行列の全体を表す．$M_n(\mathbf{R})$ において次の微分方程式を考える．

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad X(0) = I.$$

ただし，$A(t) \in M_n(\mathbf{R})$ は t について連続で，$I \in M_n(\mathbf{R})$ は単位行列．特に，$A(t)$ が反対称行列，$A(t)^T = -A(t)$, の場合，解 $X(t)$ は直交行列となることを示せ．ただし，^{T} は転置を表す．

次に，$U(t), V(t) \in M_n(\mathbf{R})$ はそれぞれ次のような行列微分方程式の解とする．

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(0) = I, \qquad \frac{dV(t)}{dt} = B(t)V(t), \quad V(0) = I,$$

ただし，$A(t), B(t) \in M_n(\mathbf{R})$ は t について連続とする．（ここでは係数行列 $A(t), B(t)$ の反対称性は仮定しない．）$M_n(\mathbf{R})$ における行列微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X - XB(t)$$

の任意の解は

$$X(t) = U(t)PV(t)^{-1}, \qquad P \in M_n(\mathbf{R}) \text{ は定数行列}$$

の形に表されることを証明せよ．ただし，$\det V(t) \neq 0$ という事実は既知としてよい．