基礎数学 I

$\boxed{1}$

x を区間 $[0,1]$ の実数，n を自然数，k を $0 \leq k \leq n$ なる整数，$\binom{n}{k}$ を 2 項係数とする．以下の問いに答えよ．

(i) 関係式

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

を用いて

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

を示せ．

(ii) 関数列

$$r_n(x) = \sum_k{}' \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を定義する．ただし，$\sum_k'$ は $k \in \{0, 1, \ldots, n\} \cap \{k \mid |k-nx| \geq n^{3/4}\}$ なる k についての和を表す．$1 \leq (k-nx)^2 n^{-3/2}$ を用いて，$r_n(x)$ は区間 $[0,1]$ において $n \to \infty$ で 0 に一様収束することを示せ．

(iii) $f(x)$ を区間 $[0,1]$ で定義された連続関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな n をとれば，区間 $[0,1]$ において

$$\sum_k{}' \left| f(x) - f(\tfrac{k}{n}) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ．

(iv) 連続関数 $f(x)$ は区間 $[0,1]$ で一様連続である．従って，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，x, y に無関係に n_0 を十分大きくとると，$|x-y| < n_0^{-1/4}$ について $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となるようにできる．このとき，十分大きな n をとれば

$$\sum_k{}'' \left| f(x) - f(\tfrac{k}{n}) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\sum_k''$ は $k \in \{0, 1, \ldots, n\} \cap \{k \mid |k-nx| < n^{3/4}\}$ なる k についての和を表す．

(v) $p_n(x)$ を

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

なる n 次多項式とする．$p_n(x)$ は区間 $[0,1]$ において $n \to \infty$ で $f(x)$ に一様収束することを証明せよ．