線形計画

$\boxed{3}$

次の線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}): & \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}
\end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $n \times m$ 係数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである．ベクトルはすべて列ベクトルとし，$^\top$ は転置を表す．さらに，$m > n$ かつ $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ と仮定する．問題 (P) の双対問題は次のように書ける．

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{D}): & \text{minimize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} \\
 & & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

以下の問 (i) – (iii) に答えよ．

(i) 問題 (P) の最適解の集合を $\mathcal{S}$ と書く．集合 $\mathcal{S}$ は凸集合であることを示せ．

(ii) 集合 $\mathcal{S}$ が有界でないときには，$\mathcal{S}$ に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{v} \in \mathcal{S} \quad \text{for all } \alpha > 0$$

となるような $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在することが知られている．この性質を用いて，集合 $\mathcal{S}$ が有界でないならば

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{0}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が存在することを示せ．

(iii) 問題 (D) において

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$$

を満たす実行可能解が存在するならば，集合 $\mathcal{S}$ は有界であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ はベクトル $\boldsymbol{y}$ のすべての成分が正であることを表す．