基礎数学 II

$\boxed{6}$

n 次実 3 重対角対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

を考える．ここで, $n \geq 2, b_i \neq 0\,(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ とする．このとき, 以下の問いに答えよ．ただし，実対称行列が対角化可能であることは用いてよい．

(i) 一般に，n 次実対称行列の固有値はすべて実数であることを示せ．

(ii) 一般に，n 次実対称行列の相異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交することを示せ．

(iii) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ を上で定義した行列 A の固有ベクトルとする．ここで $^{\mathrm{T}}$ は転置を意味する．このとき，$x_1 \neq 0$ かつ $x_n \neq 0$ であることを示せ．

(iv) 行列 A の固有値は, すべて相異なることを示せ．

(v) ベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}' = (y'_1, y'_2, \cdots, y'_n)^{\mathrm{T}}$ に対する内積を $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') = \sum_{i=1}^{n} y_i y'_i$ で定義する．固有値 $\lambda_k\,(k = 1, 2, \cdots, n)$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$ で表し，$(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(k)}) = 1$ とする．z を $z \neq \lambda_k$ なる任意の実数とする．このとき,

$$(\boldsymbol{e}_i, (A - zI)^{-1}\boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_i^{(k)} x_j^{(k)}}{\lambda_k - z}$$

を導け．ただし，$\boldsymbol{e}_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ は，第 i 成分が 1 で他の成分は 0 であるベクトルを表し，I は n 次単位行列を表す．