応用数学

1

複素数平面上の関数 f を, 原点以外の相異なる点 $b_k\,(k=1,2,\cdots)$ に 1 位の極を持つ有理形関数とする．任意の有界領域において，極は高々有限個しかないものとする．この f に対し，適当な正数列 $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ と正数 M が存在し，

- $r_n \le r_{n+1}, \qquad r_n \to \infty \quad (n \to +\infty)$
- 任意の n に対して円周 $\{z \,|\, |z| = r_n\}$ 上で $|f(z)| \le M$

が成り立つとする．このとき，以下の問いに答えよ．

1. C_r を原点を中心とした，反時計周りの向きをもつ半径 r の円周とする．C_r は関数 f の極 $b_k\,(k=1,2,\cdots)$ を通らないものとし，C_r の内側にある極を $b_{k_1}, b_{k_2}, \cdots, b_{k_N}$ とする．このとき C_r の内側の任意の点 $z(\neq b_{k_l})$ において

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{l=1}^{N} \frac{\mathrm{Res} f(b_{k_l})}{z - b_{k_l}}$$

   が成り立つことを示せ．ここで，$\mathrm{Res} f(b_{k_l})$ は関数 f の点 b_{k_l} における留数を表す.

2. 関数 f の部分分数展開

$$f(z) = f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{Res} f(b_j)}{z - b_j} + \frac{\mathrm{Res} f(b_j)}{b_j} \right)$$

   が成り立つことを示せ.

3. 関数 $g(z) = \cot z - \dfrac{1}{z}$ の部分分数展開を求めよ.