グラフ理論

$\boxed{2}$

有限集合 A に対しその要素数を $|A|$ と表す．単純無向グラフを以下では単にグラフと呼び，節点集合 V，枝集合 E からなるグラフを (V, E) と表す．２本の枝は少なくとも一つの端点を共有するとき隣接すると言う．グラフ $G = (V, E)$ の枝の部分集合 $M \subseteq E$ は，どの２本の枝 $e, e' \in M$ も隣接しないときマッチングと呼ばれる．$G = (V, E)$ のマッチング M は，どの枝 $e \in E - M$ を M に加えても $M \cup \{e\}$ がマッチングにならないとき極大と言う．

M' を G の任意の極大マッチングとし，M^* を本数 $|M^*|$ が最大である G のマッチングとする．以下の (i) から (iii) の問いに答えよ．

(i) M^* のどの枝 e に対しても，少なくとも１本の M' の枝が隣接することを説明せよ．

(ii) 常に $|M^*| \le 2|M'|$ が成立することを証明せよ．

(iii) $|M^*| = 4$，$|M'| = 2$ なる M^*, M' を持つ連結なグラフ G の例を作成し，図示せよ（図中の枝に記号を $e_1, e_2, \ldots$ のように付し，M^*, M' に含まれる枝はこれらの記号を用いて示すこと）．