オペレーションズリサーチ

数理計画

$\boxed{3}$ この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

次の非線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{(P):} \quad & \text{minimize} && f(\boldsymbol{x}) \\
& \text{subject to} && g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

ただし，$f : R^n \to R$ と $g_i : R^n \to R,\ i = 1, \ldots, m$ は連続的微分可能な凸関数である．

問題 (P) は狭義実行可能，つまり $g_i(\boldsymbol{x}^0) < 0,\ i = 1, \ldots, m$ となる点 $\boldsymbol{x}^0 \in R^n$ が存在すると仮定する．

以下の問 (i)–(iii) に答えよ．

(i) 一般に，関数 $h : R^n \to R$ が連続的微分可能な凸関数であれば，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$h(\boldsymbol{x}) \ge h(\boldsymbol{y}) + \nabla h(\boldsymbol{y})^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

ここで $\nabla h(\boldsymbol{y})$ は関数 h の点 $\boldsymbol{y}$ における勾配ベクトル，$^\top$ はベクトルの転置を表す．

(ii) 固定された任意の点 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R^n$ に対して，次の凸 2 次計画問題 (Q) は実行可能解をもつことを示せ．

$$
\begin{aligned}
\text{(Q):} \quad & \text{minimize} && \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{B} \boldsymbol{d} \\
& \text{subject to} && g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{d} \le 0, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

ここで $\boldsymbol{B}$ は正定値対称な $n \times n$ 定数行列であり，問題 (Q) の決定変数は $\boldsymbol{d} \in R^n$ である．

(iii) 点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が問題 (P) の最適解であるための必要十分条件は $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ が問題 (Q) の最適解となることである．このことを示せ．

オペレーションズリサーチ

待ち行列

3 この科目は数理計画と待ち行列あわせて 2 問出題されている。どちらか一方を選択せよ。

通常の待ち行列では，サービスを待っている客がいる時はサーバは必ずサービスを行い，システムが空の時のみ停止する．ここでは，サービスを待っている客がいる場合でも，サーバが停止する（休暇をとる）以下のような単一サーバシステムを考える．

システム内に客がいなくなると，サーバは待ち客数が N 人（$N \geq 1$）になるまで休暇をとる．N 人目の客が到着すると直ちにそれらの客に対して先着順でサービスを開始し，再びシステムが空になるまで連続してサービスを行い，空になると再び休暇をとるという動作を繰り返す．

このようなシステムにおいて，客の到着が率 λ のポワソン過程に従い，客のサービス時間が独立かつ同一な一般分布に従う場合を考える．サービス時間の分布関数を $B(x)$，そのラプラス・スティルチェス変換形を $B^*(s)$，平均を b として，(i) から (v) の問いに答えよ．

(i) A を客一人のサービス時間の間に新たに到着する客の数とする．A の確率母関数 $A(z)$ を λ と $B^*(s)$ を用いて表せ．

(ii) X_n を n 番目の客のサービスが終了した直後のシステム内客数とし，$p_{i,j} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$ と定義する．また，a_k を一人の客のサービス中に k 人の客が到着する確率とする．$i = 0$ と $i \geq 1$ の場合に分けて考えることにより，$p_{i,j}$ を a_k を用いて表せ．

(iii) システムが定常状態にあると仮定する．サービス終了直後のシステム内客数が k 人である定常確率を π_k としたとき，π_k の Z 変換

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$$

を，λ, N, $B^*(s)$ および π_0 を用いて表せ．

(iv) システムが定常状態にあるとの仮定の下で，π_0 を決定せよ．

(v) $\Pi(z)$ は定常状態における任意時点でのシステム内客数分布の確率母関数に等しい．その理由を述べよ．