# 物理統計学

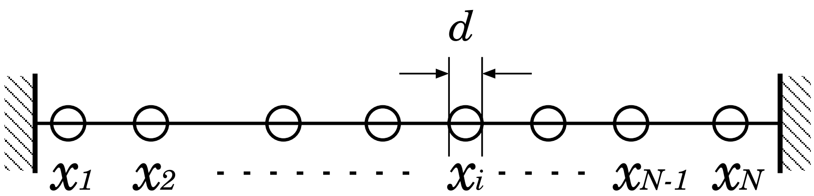
$\boxed{5}$ 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ.

**平衡統計力学**

図のように, 質量 $m$ をもつ粒子が $N$ 個 (各粒子は質点と考え, その位置座標を各々$x_1, x_2, ..., x_N$ とする）, 長さ $L$ の線分 $(0 \leq x \leq L)$ 上を運動している. 粒子間には剛体球的な斥力が働いている. すなわち, 相互作用のポテンシャル $v$ は, ２つの粒子間の距離を $X$ として

$$v(X) = \infty (0 < X < d), \qquad v(X) = 0 (X > d). \tag{1}$$

また $x = 0$ と $x = L$ に存在する壁と粒子の間の剛体的な相互作用のため, $x_1 \geq d/2$, $x_N \leq L - d/2$ に注意する. ボルツマン定数を１, $L > Nd$ として, 以下の問に答えよ.




(i) $T$ を体系の温度を表すとして, この系の分配関数 $Z(N, L, T)$ と自由エネルギー $F(N, L, T)$ を求めよ.

(ii) 体系の圧力 $p$ を $T, L, N$ を用いて表現する状態方程式を与え, $L$ を変えたときの圧力 $p$ の振舞を図示せよ.

# 物理統計学

$\boxed{5}$ 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ.

**確率過程**

ボールが全部で $2R$ 個あり、これらが２つの壷 A,B に分けて入っている. すなわち, 壷 A,B に入っているボールの数を各々$N_A(\geq 0), N_B(\geq 0)$ とすると, $N_A + N_B = 2R$. 各ボールには１から $2R$ の番号が重複なく付いているとする. さて１から $2R$ の間の１つの整数 J をランダムに, すなわち各々$1/(2R)$ の確率で選び, J という番号をもつボールを他の壷に移し換える. このステップを続けることにより生成される確率過程について, 以下の問に答えよ.

(i) 変数 $I$ を $I = (N_A - N_B)/2$ で定義する. $(n+1)$ 回このステップを繰り返した直後の $I$ の分布関数を $p(i, n+1)$ とする. これを $\{p(j,n)\}(j = -R, ..., -1, 0, 1, ..., R)$ を用いて表す, 差分方程式を導出せよ.

(ii) １ステップに要する時間を $\tau$, 長さの次元をもつ量を $a$ として, 時 $t = n\tau$, 位置座標 $X = Ia$ を導入する. 連続極限 $a \to 0, \tau \to 0, R \to \infty, a^2/(2\tau) \to D$(定数)$, R\tau \to 1/\gamma$(定数) を (i) で導いた差分方程式に適用し, オルンシュタイン－ウーレンベック過程を記述するフォッカープランク方程式を導け.

(iii) このフォッカープランク方程式に基づき, $t \to \infty$ のもとで実現される $X$ の平衡分布を求めよ.