力学系数学

$\boxed{6}$

$M_n(\mathbf{R})$ で $n \times n$ 実行列の全体を表す. $M_n(\mathbf{R})$ において次の微分方程式を考える.

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad X(0) = I.$$

ただし, $A(t) \in M_n(\mathbf{R})$ は t について連続で, $I \in M_n(\mathbf{R})$ は単位行列. 特に, $A(t)$ が反対称行列, $A(t)^T = -A(t)$, の場合, 解 $X(t)$ は直交行列となることを示せ. ただし, ^{T} は転置を表す.

次に, $U(t), V(t) \in M_n(\mathbf{R})$ はそれぞれ次のような行列微分方程式の解とする.

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(0) = I, \qquad \frac{dV(t)}{dt} = B(t)V(t), \quad V(0) = I,$$

ただし, $A(t), B(t) \in M_n(\mathbf{R})$ は t について連続とする. (ここでは係数行列 $A(t), B(t)$ の反対称性は仮定しない.) $M_n(\mathbf{R})$ における行列微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X - XB(t)$$

の任意の解は

$$X(t) = U(t)PV(t)^{-1}, \qquad P \in M_n(\mathbf{R}) \text{ は定数行列}$$

の形に表されることを証明せよ. ただし, $\det V(t) \neq 0$ という事実は既知としてよい.