基礎数学 I

1

s を実数とし，ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

とガンマ関数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \tag{2}$$

の定義域とその性質について，以下の問いに答えよ．

(i) $s > 0$ とする．広義積分

$$I(s) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$$

の収束，発散を調べよ．

(ii) $s = 1$ のとき，

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

は発散することを示せ．

(iii) $s > 1$ のとき，ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

は収束することを示せ．

(iv) $\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^{s+1} = 0$ に注意して，$s > 0$ のとき，(2) の右辺の積分は収束することを示せ．

(v) $s > 0$ のとき，

$$\frac{1}{n^s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt \tag{3}$$

を導け．さらに，$s > 1$ のとき，関係式

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \tag{4}$$

が成り立つことを示せ．