

## 線形計画

3

次の線形計画問題  $P$  を考える .

$$P: \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

ただし,  $A$  は  $m \times n$  係数行列,  $\mathbf{b}$  は  $m$  次元係数ベクトル,  $\mathbf{c}$  は  $n$  次元係数ベクトル,  $\mathbf{x}$  は  $n$  次元変数ベクトルである . ベクトルはすべて列ベクトルとし,  $^\top$  は転置を表す . 問題  $P$  は最適解をもつと仮定し, 目的関数の最小値を  $\min(P)$  と表す .

さらに, 問題  $P$  に関連して,  $m$  次元ベクトル  $\mathbf{w}$  をパラメータとして含む次の線形計画問題  $P(\mathbf{w})$  を考える .

$$P(\mathbf{w}): \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbf{w}^\top (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \\ \text{subject to} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

この問題の目的関数の最小値を  $\min(P(\mathbf{w}))$  と表す . ただし, 問題  $P(\mathbf{w})$  が有界でないときは  $\min(P(\mathbf{w})) = -\infty$  と定義する .

以下の問 (i)–(iii) に答えよ .

- (i) 任意の  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  に対して  $\min(P) \geq \min(P(\mathbf{w}))$  が成り立つことを示せ .
- (ii) 問題  $P$  の双対問題の任意の最適解を  $\mathbf{w}^*$  とする . そのとき,  $\min(P) = \min(P(\mathbf{w}^*))$  が成り立つことを示せ .
- (iii) ある  $\bar{\mathbf{w}} \geq \mathbf{0}$  に対して  $\min(P) = \min(P(\bar{\mathbf{w}}))$  が成り立つならば, ベクトル  $\bar{\mathbf{w}}$  は問題  $P$  の双対問題の最適解であることを示せ .