

基礎数学 II

6

実対称行列はそのすべての固有値が正であるとき、正定値といい、すべての固有値が非負であるとき、半正定値という。以下の問いに答えよ。

- (i) $n \times n$ 実対称行列 B が半正定値であるための必要十分条件は、すべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $x \cdot Bx \geq 0$ の成り立つことである。また、 B が正定値となるための必要十分条件は、すべての $x \neq 0$ に対して、 $x \cdot Bx > 0$ の成り立つことである。これを証明せよ。ただし、 $a \cdot b$ で $a, b \in \mathbb{R}^n$ の内積を表す。
- (ii) $n \times n$ 実行列 A に対し、 $S_0 = A^T A$ とおく。 S_0 は半正定値対称行列で、 $\text{rank } A = \text{rank } S_0$ が成り立つことを示せ。ただし、 $\text{rank } A$ は行列 A の階数を、また、 A^T は A の転置行列をそれぞれ表す。
- (iii) 階数 1 の行列を $A = ba^T$ で与える。ただし、 $a, b \in \mathbb{R}^n$ はともにゼロでない列ベクトルで、かつ $\|b\| = 1$ とする。このとき、対称行列 $S = \text{tr}(A^T A)I - A^T A$ は半正定値であるが、正定値ではないことを示せ。ただし、 $\|\cdot\|$ はベクトルのノルムを、 tr は行列のトレースを、 I は $n \times n$ 単位行列をそれぞれ表す。
- (iv) 一般に、 $S = \text{tr}(A^T A)I - A^T A$ が正定値であるための必要十分条件は $\text{rank } A \geq 2$ であることを示せ。