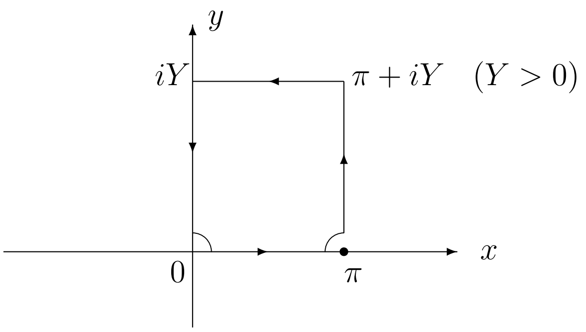
応用数学

$\boxed{1}$

複素数 z を変数とする対数関数 $\log z$ に対し，z の偏角 $\arg z$ を $-\pi < \arg z \leq \pi$ と選び, z が正の実数のとき $\log z$ が実数値をとるようにしてその主値を定義し，これを $\mathrm{Log}\, z$ で表す．以下の問いに答えよ．

(i) 2 つの複素数 z_1, z_2 が $\mathrm{Log}\, z_1 z_2 = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$ を満たすための条件を示せ．

(ii) 閉曲線 C を



で与える．ここで点 0 と点 π の周りでは，C はそれぞれの点を中心とした半径 δ $(\delta > 0)$ の円周（の四半分）上を通るものとする．このとき，閉曲線 C に沿っての関数 $\mathrm{Log}\,(1 - e^{2iz})$ の積分

$$\oint_C \mathrm{Log}\,(1 - e^{2iz}) dz$$

の値は 0 である．この結果を用いて，実軸上の積分 $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{Log}\,\left(1 - e^{2ix}\right) dx$ の値を求めよ．ここで，$0 \leq |z| \leq \pi/2$, $z = x + i\,y\,(x, y \in \mathbb{R})$ ならば, 不等式

$$|1 - e^{2iz}| \leq 4e^{-y}\,|z|$$

が成り立つことを用いてよい．

(iii) $\displaystyle\int_0^\pi \log\,(\sin x)\, dx = -\pi \log 2$ となることを示せ．ここでの $\log$ は実の対数関数を表す．