グラフ理論

$\boxed{2}$

単純無向グラフを単にグラフと呼び，グラフ H の節点集合，枝集合をそれぞれ $V(H)$, $E(H)$ と書く．以下，G を節点数 $n(\geq 3)$ の完全グラフとし，正の枝重み $w(e) > 0, e \in E(G)$ を考える．2 節点 u, v 間の枝 $e = (u, v)$ の重みは $w(u, v)$ とも表す．各枝 $e = (u, v) \in E(G)$ に対して，$w^*(e)(= w^*(u, v))$ を 2 節点 u, v 間の重み w に関する最短路の長さとする．G の部分グラフ G' に対して，$\sum_{e \in E(G')} w(e)$, $\sum_{e \in E(G')} w^*(e)$ をそれぞれ $w(G')$, $w^*(G')$ と表す．S を $V(G)$ の部分集合で要素数 2 以上のものとし，S 内の節点をすべて含む G の連結な部分グラフ G' の中で，$w(G')$ を最小にするものを T_1，$w^*(G')$ を最小にするものを T_2 とする．以下の問いに答えよ．

(i) 次の命題を証明せよ．すべての枝 $e \in E(G)$ に対して $w^*(e) = w(e)$ が成立するための必要十分条件は，任意の 3 節点 $x, y, z \in V(G)$ に対して $w(x, y) + w(y, z) \geq w(x, z)$ が成立することである．

(ii) T_2 は木であり，どの葉節点も S 内の点であることを証明せよ．

(iii) $w(T_1) \geq w^*(T_2)$ が成立することを証明せよ．

(iv) $w^*(T_2) \geq w(T_1)$ が成立することを証明せよ．

(v) T_1 の各枝 $e \in E(T_1)$ に対して，$w(e) = w^*(e)$ であることを証明せよ．