オペレーションズリサーチ

$\boxed{3}$

$n \times n$ 実対称行列 $\boldsymbol{A}$，n 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$，実数 μ を用いて
2 次関数 $f, g_\mu : R^n \to R$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \\ g_\mu(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top (\boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

ここで，$^\top$ は転置を表し，$\boldsymbol{I}$ は $n \times n$ の単位行列である．
このとき以下の問 (i),(ii) に答えよ．

(i) $\boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{I}$ が半正定値行列であれば，

$(\boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}^* = -\boldsymbol{a}$ を満たす $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ は制約なし最小化問題

$$\text{minimize} \quad g_\mu(\boldsymbol{x})$$

の大域的最適解となることを示せ．

(ii) 次の 3 条件

(a) $\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{I}$ は半正定値行列

(b) $(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}^* = -\boldsymbol{a}$

(c) $\lambda \geq 0$, $(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{x}^* \leq 1$, $\lambda(1 - (\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{x}^*) = 0$

を満たす $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ と $\lambda \in R$ が存在するとき，

$\boldsymbol{x}^*$ は制約つき最小化問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leq 1 \end{array}$$

の大域的最適解となることを示せ．