現代制御論

$\boxed{4}$

状態空間モデル

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

で表されるシステムを考える．ここに，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は，それぞれ時刻 t における状態ベクトルと入力ベクトルである．また，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ である．

任意の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に対してある有限な非負の実数 t_f と入力 $u(t)$, $0 \le t \le t_f$ が存在して $x(0) = x_0$ を $x(t_f) = 0$ に移すとき，行列対 (A, B) は可制御であるという．(A, B) が可制御であるための必要十分条件として，次の3つの等価な条件が知られている．

(a) $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$

(b) 任意の複素数 λ に対して $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda I_n & B \end{bmatrix} = n$ が成立する．ただし，I_n は n 次元の単位行列である．

(c) 適当な定数行列 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ を選ぶことにより，$A + BK$ の固有値を任意の値 (ただし複素数は共役対を含む) に配置することができる．

これら3つの必要十分条件を用いて，以下の問いに答えよ（どの条件を何度用いてもよい）．

(i) 任意の定数行列 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して，(A, B) が可制御であることと $(A+BK, B)$ が可制御であることは等価である．これを証明せよ．

(ii) 行列 A は安定，すなわち，A のすべての固有値の実部は負であるとする．このとき，$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を未知変数とする線形行列方程式

$$AP + PA^T + BB^T = 0$$

は半正定値 (非負定値) 解

$$P = \int_0^\infty \mathrm{e}^{At} BB^T \mathrm{e}^{A^Tt}\, dt$$

をもつことを証明せよ．ただし，^{T} は転置を表す．(ヒント: $\frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{At}BB^T\mathrm{e}^{A^Tt})$ を考えよ) さらに，(A, B) が可制御であるならば，この半正定値解 P は正定値となることを証明せよ．ただし，この証明に (iii) の結果を用いてはならない．

(iii) 行列 A が安定とは限らない場合，次の (イ) と (ロ) は等価であることを証明せよ．

(イ) (A, B) は可制御である．

(ロ) ある定数行列 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ と正定値対称行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，$A + BK$ は虚軸上に固有値をもたず，かつ

$$(A + BK)P + P(A + BK)^T + BB^T = 0$$

が成立する．