

# 物理統計学

5 平衡統計力学, 確率過程のどちらか一方を選択せよ.

## 平衡統計力学

$N$  個のスピンからなる体系を考える. 各スピンの状態は 1 あるいは -1 の値をとるスピン変数  $\{S_i\} (i = 1, \dots, N)$  により記述される. 体系の温度を  $T$  とし, ボルツマン (Boltzmann) 定数  $k_B$  を 1 とする. 外部磁場の強さを  $B$ , 各スピンはそれに隣接する  $\gamma$  個のスピンと相互作用し, その強さを  $\epsilon$  とする. このとき, 体系のエネルギーは次式で与えられる.

$$E(S_1, \dots, S_N) = -\epsilon \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j - B \sum_{i=1}^N S_i.$$

但し  $\sum_{\langle i, j \rangle}$  は隣接する全てのスピン対についての和を表す. 以下の問いに答えよ.

- (i) 相互作用がないとき ( $\epsilon = 0$ ), 体系の磁化の強さ  $M = \sum_i S_i / N$  の期待値  $\langle M \rangle$  を  $B$  と  $T$  の関数として求め, 図を用いてその  $T, B$  依存性について簡潔に説明せよ.
- (ii)  $\epsilon > 0$  のときに, 平均場近似を用いて,  $\langle M \rangle$  を  $B$  と  $T$  の関数として求め, 特に  $B = 0$  の場合について, その  $T$  依存性について簡潔に説明せよ.

## 確率過程

連続な時間変数  $t (t \geq 0)$  に関して非減少で, 非負の整数値をとる 1 次元確率過程  $N(t)$  について考える.  $p(n_1, t_1 | n_0, t_0)$  は, 時刻  $t_0$  において状態  $n_0$  にいた系 (即ち  $N(t_0) = n_0$ ) が, 時刻  $t_1$  に状態  $n_1$  にいる遷移確率を表すとする. 以下の問いに答えよ.

- (i) 確率過程  $N(t)$  がマルコフ過程のとき, 遷移確率の満たすべき次のチャップマン-コロモゴルフ (CK) 方程式を導け.

$$p(n_2, t_2 | n_0, t_0) = \sum_{n_1} p(n_2, t_2 | n_1, t_1) p(n_1, t_1 | n_0, t_0)$$

- (ii) 確率過程  $N(t)$  は時刻  $t$  までに, 空間に固定されたある面を通過する粒子の総数を表すとする. 微小時間  $dt$  の間に 1 個の粒子が通過する確率は  $\mu$  を正の定数として  $\mu dt$  で与えられるとし, 2 個以上が通過する確率は無視してよい. このとき, 遷移確率  $p(n_1, t_1 | n_0, t_0)$  を求めよ.
- (iii) (ii) で求めた遷移確率  $p(n_1, t_1 | n_0, t_0)$  が (i) のチャップマン-コロモゴルフ (CK) 方程式を満足することを示せ.