

力学系数学

6

連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(y - z) \\ \frac{dy}{dt} = y(z - x) \\ \frac{dz}{dt} = z(x - y) \end{cases} \quad (1)$$

について次の問いに答えよ .

(i) $x(0) + y(0) + z(0) = 1$ と仮定するとき , 任意の t について

$$x(t) + y(t) + z(t) = 1$$

が成り立つことを示せ .

関係式 $x(t) + y(t) + z(t) = 1$ を用いて 変数 $z(t)$ を消去すると方程式 (1) は

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x + 2y - 1) \\ \frac{dy}{dt} = -y(2x + y - 1) \end{cases} \quad (2)$$

となる . 方程式 (2) について以下の問いに答えよ .

- (ii) xy -平面の領域 $D = \{(x, y) | x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ における方程式 (2) の平衡点をすべて求め , 線形近似法によって , その安定性を調べよ .
- (iii) xy -平面全体における方程式 (2) の平衡点をすべて求め , 線形近似法によって , その安定性を調べよ . ただし , (ii) で調べた平衡点については除くものとする .
- (iv) xy -平面全体における方程式 (2) の解曲線の概形を図示せよ .