基礎数学 I

1

$a_k \neq 0$ なる実数列 a_k, $(k = 1, 2, \ldots)$ に対して積

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$$

を考える．$n \to \infty$ で p_n が 0 でない有限な値 p に収束するとき，無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ は極限値 p に収束するという．以下の問いに答えよ．

(i) 無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するとき極限 $\lim_{k\to\infty} a_k$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 1$$

であることを示せ．

(ii) $b_k > -1$ なる実数列 b_k, $(k = 1, 2, \ldots)$ に対して無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + b_k)$ を考える．無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + b_k)$ が収束するならば，無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + b_k)$ も収束することを示せ，さらに，この逆も成り立つことを示せ．

(iii) $c_k \geq 0$ なる実数列 c_k, $(k = 1, 2, \ldots)$ に対して無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + c_k)$ を考える．正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ が収束するならば，無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + c_k)$ も収束することを示せ，さらに，この逆も成り立つことを示せ．

(iv) 数列

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad a_{2k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

に対して無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ と無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k)$ の収束，発散を調べよ．(収束する場合も極限は求めなくてよい．)

アルゴリズム基礎

2

与えられた整数 $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ を整列したい．以下の問 (i)–(ii) に答えよ．なお，回数の解析はいずれも最悪の場合でよい．また，空欄のサイズは答えの長さと関係ない．

(i) 下記の擬似コードに対し再帰呼び出しを用いて空欄 (a) に入るアルゴリズムを示せ．また，Quicksort(1, n) により配列が整列されるまでの再帰呼び出しの回数を解析せよ．

```
Quicksort(left, right)
    i := left,  j := right
    pivot := (a_i + a_j)/2
    WHILE (i < j)
        WHILE (a_i < pivot)  i := i + 1  END WHILE
        WHILE (a_j > pivot)  j := j − 1  END WHILE
        IF (i ≤ j)
            tmp := a_i,  a_i := a_j,  a_j := tmp
            i := i + 1,  j := j − 1
        END IF
    END WHILE
    [                  (a)                  ]
END
```

(ii) 以下の三つの操作をサポートするデータ構造があるとする．これを用いて再帰呼び出しを使わず (i) のクィックソートを実現せよ（空欄 (b) に入るアルゴリズムを示せ）．また，配列が整列されるまで PUSH と POP の行われる回数を解析せよ．

操作 INITIALIZE: 要素数 0 の空のデータ構造を作る．

操作 PUSH(x): x を先頭要素として挿入する．ただし x は正整数と仮定する．

操作 POP: 先頭の要素を削除しその値を返す．ただし要素数が 0 の場合は 0 を返す．

```
        INITIALIZE,  PUSH(n),  PUSH(1)
loop:
        left := POP,  right := POP
        IF (left < 1) GOTO done END IF
        i := left,  j := right
        [                  (b)                  ]
done:
        （配列 a は整列済み）
```

線形計画

$\boxed{3}$

次の線形計画問題 P を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{P:} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + k x_{n+1} \\
& \text{subject to} & a_i \leq x_i + x_{n+1} \ \ (i = 1, 2, \ldots, n) \\
& & x_i \geq 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n+1)
\end{array}
$$

ただし，k, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は定数であり，$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ は決定変数である．

問題 P の双対問題 D は次のように書ける．

$$
\begin{array}{lll}
\text{D:} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \leq k \\
& & 0 \leq y_i \leq 1 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}
$$

k を n 以下の自然数とし，$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ とする．次の問 (i)-(iii) に答えよ．

(i) 双対問題 D の最適解を求めよ．

(ii) 問題 P の任意の最適解 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ と問題 D の任意の最適解 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して次式が成り立つことを双対定理を用いて示せ．

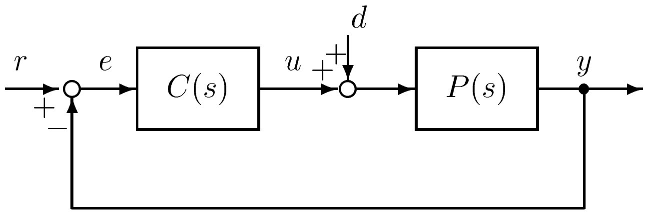
$$(1 - y_i) x_i = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$y_i (x_i + x_{n+1} - a_i) = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(iii) 問題 P は $x_{n+1}^* = a_k$ となる最適解 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+1}^*)$ を持つ．そのような最適解における x_i^* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を求めよ．

線形制御理論

$\boxed{4}$



上図のフィードバック制御系を考える．ここに，r は目標値，d は外乱，y はプラント出力，u は制御入力および e は制御偏差である．$P(s)$ と $C(s)$ はそれぞれプラントおよび制御器を表す伝達関数である．

(i) このフィードバック制御系の安定性の定義を述べよ．

以下では，$P(s)$ は安定かつプロパーであるとする．

(ii) つぎの命題を証明せよ．

「$P(s)Q(s)$ が恒等的に 1 でないような安定かつプロパーな伝達関数 $Q(s)$ に対して，

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)}$$

で与えられる制御器は，フィードバック制御系を安定化する．　逆に，フィードバック制御系を安定化する任意の制御器 $C(s)$ に対して，上式を満足する安定かつプロパーな伝達関数 $Q(s)$ が存在する．」

(iii) 条件

(a) フィードバック制御系が安定である．

(b) r から y への閉ループ伝達関数が，与えられた伝達関数 $M(s)$ に一致する．

を同時に満足する制御器 $C(s)$ を設計したい．以下の (1),(2) に答えよ．

(1) 次の (イ),(ロ) のそれぞれの場合において，条件 (a) と (b) を同時に満足する $C(s)$ は存在するか．存在するならば，そのような $C(s)$ を一つ求め，そのボーデ (Bode) 線図を描け．

$$\text{(イ)}\quad P(s) = \frac{-2s+2}{2s+1}, \qquad M(s) = \frac{(1-s)(3s+2)}{(s+1)(s+2)}$$

$$\text{(ロ)}\quad P(s) = \frac{-2s+2}{2s+1}, \qquad M(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

(2) 条件 (a) と (b) を同時に満足する制御器 $C(s)$ が存在するために，$M(s)$ の極，零点および相対次数が満たすべき条件を求めよ．

基礎力学

5

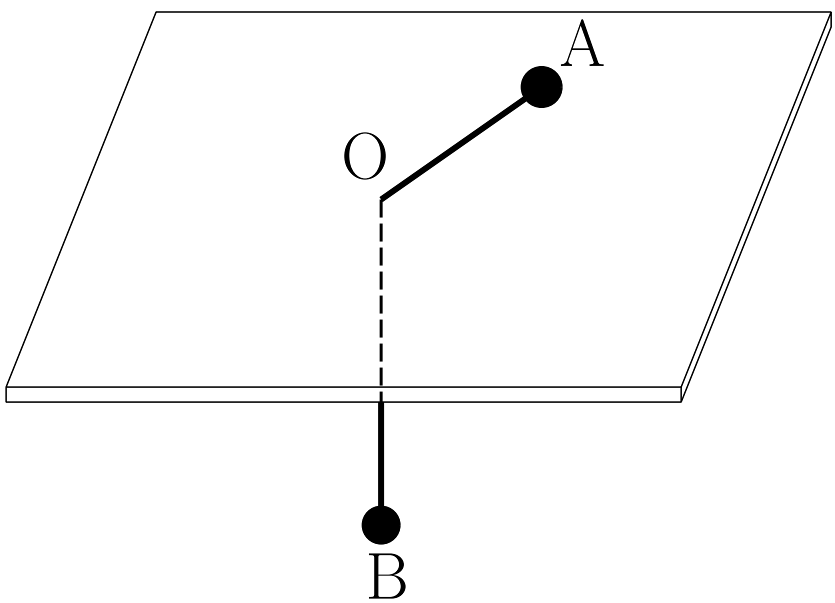
図に示すように机の上の一点Oに開けられた小穴に通した糸で２つの質点A，Bが結ばれている．質量 m の質点Aは水平に置かれた机の面上を運動し，質量 M の質点Bは鉛直方向にのみ運動する．２つの質点を結ぶ長さ ℓ の糸は，質量が無視でき伸縮せず，質点の運動中ゆるまないものとする．また，質点および糸に摩擦は働かないものとし，重力加速度の大きさを g とする．以下の問いに答えよ．

(i) 質点Aの点Oに関する角運動量は保存されることを示せ．

(ii) 質点Aが点Oを中心とする半径 r_0 の円軌道を描いている場合を考える．質点Bによる重力と質点Aの遠心力の釣り合いから質点Aの点Oに関する角速度 ω を r_0，m，M，g で表せ．

(iii) この系の運動方程式を書き下せ．質点Aの点Oに関する角運動量の大きさを L としたとき，$r = \overline{\mathrm{AO}}$ に対する運動方程式を導け．

(iv) 最初，半径 r_0 の円軌道を質点Aが描いているとする．時刻 t_0 には，質点Aと点Oとの距離 r が微小量 ϵ だけ増し $r(t_0) = r_0 + \epsilon$ となり，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t_0) = 0$ であったとすると，その後も r の r_0 からの変化は微小となる。ϵ の１次のオーダーまでの近似で r はどのような時間変化をするかを計算せよ．ここで，半径の増加は角運動量が保存されるように行われるとする．



基礎数学 II

$\boxed{6}$

m 次複素正方行列 $A=(a_{ij})$，n 次複素正方行列 $B=(b_{kl})$，$m\times n$ 複素行列 $C=(c_{il})$ が与えられたとき，$m\times n$ 複素行列 $X=(x_{il})$ に対する方程式

$$AX-XB=C$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) 行列 A と行列 B がそれぞれ上三角行列の場合，任意の $i=1,2,\ldots,m$ と $k=1,2,\ldots,n$ に対して $a_{ii}\neq b_{kk}$ が成立するならば，行列 X が一意に定まることを示せ．

(ii) 一般に，行列 A と行列 B が共通の固有値をもたないならば，行列 X は一意に定まることを示せ．ここで，適当な正則行列 U,V が存在して，UAU^{-1}, VBV^{-1} がそれぞれ上三角行列になるという事実を用いてよい．

(iii) $m=n$ とする．行列 A を対角化可能, 行列 C をエルミート行列とし，

$$B=-A^*$$

と選ぶ．このとき，行列 X が一意に定まる場合，$X=X^*$ であることを示せ．ここで，A^* と X^* はそれぞれ行列 A と X のエルミート共役を表す．

応用数学

$\boxed{1}$

実数 t の関数 $f,\ g$ を有界かつ絶対可積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty$$

とし，f と g のたたみこみ $(f * g)(t)$ を

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

1. 閉区間 I を台とする関数 $S_I(t)$ を

   $$S_I(t) = \begin{cases} 1 & (t \in I) \\ 0 & (t \notin I) \end{cases}$$

   で定義する．a を定数とし，閉区間 I,J を

   $$I = [0, 1], \quad J = [a, a+1]$$

   とする．このとき，S_I と S_J のたたみこみ $(S_I * S_J)(t)$ を求め，これが連続関数となることを確かめよ．

2. 関数 $f * g$ が有界かつ絶対可積分となることを示せ．

3. 関数 $f * g$ が連続関数となることを示せ．ここで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な階段関数 F_δ, G_δ が存在して

   $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - F_\delta(t)|dt < \varepsilon, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t) - G_\delta(t)|dt < \varepsilon$$

   が成立することを用いてよい．ただし，F_δ, G_δ は定数 δ と，f または g から決まる $a_k\ (k \in \mathbb{Z})$ とを用いて，

   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k S_{[k\delta, k\delta+\delta]}(t)$$

   の形に表される．

グラフ理論

$\boxed{2}$

ネットワーク $N = (G = (V, E), s, t, \ell, c)$ を有向グラフ G，ソース $s \in V$，シンク $t \in V$，枝のフロー下限値 $\ell(e) \geq 0,\ e \in E$, 枝のフロー上限値 $c(e) \geq 0,\ e \in E$ の組と定義する．ただし，V, E はそれぞれ G の節点集合，枝集合を表す．ここで，G において節点 v から出る有向枝の集合，節点 v に入る有向枝の集合をそれぞれ $E^+(v)$, $E^-(v)$ で表し，N に対する st-フロー x を次の流量保存則を満たす非負実数 $x(e) \geq 0$, $e \in E$ と定義し，その流量を $\sum_{e \in E^+(s)} x(e) - \sum_{e \in E^-(s)} x(e)$ で定める．

[流量保存則] $\displaystyle\sum_{e \in E^+(v)} x(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x(e) = 0, \quad v \in V - \{s, t\}$

st-フロー x に対して以下の上限，下限制約を考える．

[上限制約] $x(e) \leq c(e), \quad e \in E,$

[下限制約] $\ell(e) \leq x(e), \quad e \in E$

節点 u から節点 v へ向かう有向枝を (u, v) と書き，そのフロー下限値, フロー上限値をそれぞれ $\ell(u, v)$, $c(u, v)$ とも書く．一般に，上限制約のみを満たす st-フローで流量を最大にするものは，フロー増加路に基づくアルゴリズム（これをアルゴリズム A と呼ぶ）により求めることができる．以下の問いに答えよ．

(i) この問 (i) では，N において，ある 1 本の枝 $e_1 = (u_1, v_1)$ を除き，$\ell(e) = 0,\ e \in E - \{e_1\}$ が成り立っているものとし，N から以下の手順でネットワーク $N' = (G', a, b, \ell', c')$ を構成する．G に新しい節点 a, b と新しい枝 (a, v_1), (u_1, b), (t, s) を付け加えた有向グラフを G' とする．G' のフロー下限値 ℓ' はすべての枝で 0 とし, G' のフロー上限値 c' を次のように定める．

$c'(a, v_1) = c'(u_1, b) = \ell(e_1), \quad c'(t, s) = \sum_{e \in E} c(e), \quad c'(e_1) = c(e_1) - \ell(e_1),$

$c'(e) = c(e),\ e \in E - \{e_1\}.$

このとき，N が上下限制約を満たす st-フローをもつための必要十分条件を N' における ab-フローを用いて与えよ．

(ii) 一般に N が上下限制約を満たす st-フローをもつかどうかをアルゴリズム A を適用して判定する方法を示せ．

(iii) 与えられた N に対し上下限制約を満たす st-フローで流量を最大にするものを求めたい．アルゴリズム A を適用してこれを計算する方法を示せ．

オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

(i) $g : R^n \to R$ を微分可能な凸関数とする．以下の問 (a), (b) に答えよ．

(a) 点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ における関数 g の勾配を $\nabla g(\boldsymbol{0})$ と表す．次の不等式がすべての $\boldsymbol{x} \in R^n$ に対して成り立つことを示せ．

$$g(\boldsymbol{x}) \geq g(\boldsymbol{0}) + \nabla g(\boldsymbol{0})^\top \boldsymbol{x}$$

ここで $^\top$ は転置記号を表す．

(b) 関数 $h : R^n \to R$ を次式で定義する．

$$h(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{x}\|^2$$

ただし $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ のユークリッドノルムを表す．集合 $S = \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid h(\boldsymbol{x}) \leq h(\boldsymbol{0})\}$ は有界であることを示せ．

(ii) 次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(P)}: & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}$$

ここで $f : R^n \to R$ と $c_i : R^n \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ は連続的微分可能とし，制約条件の添字集合を $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, m\}$ とする．点 $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ を問題 (P) の局所的最適解とし，点 $\boldsymbol{x}^*$ と Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_i^* \,;\, i \in \mathcal{I})$ のペア $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ は問題 (P) の Karush-Kuhn-Tucker 条件 (KKT 条件) を満たすものとする．さらに，添字集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ を $\mathcal{A} = \{i \mid \lambda_i^* \neq 0\}$ で定義し，次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(Q)}: & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (i \in \mathcal{A}) \end{array}$$

次の (A), (B) の各々に対して，その命題が真であれば証明し，偽であれば反例を一つ与えよ．

(A) ある Lagrange 乗数 $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{\lambda}_i \,;\, i \in \mathcal{A})$ が存在して，$(\boldsymbol{x}^*, \hat{\boldsymbol{\lambda}})$ は問題 (Q) に対する KKT 条件を満たす．

(B) 点 $\boldsymbol{x}^*$ は問題 (Q) の局所的最適解である．

現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{1}$$

で記述される線形システムについて以下の問いに答えよ．ただし u は入力，y は出力，x は状態であり，A, B, C は適当なサイズの行列である．

(i) 状態方程式 (1) において，$u = Kx + v$ として，新しい入力 v をもった線形システム

$$\frac{d}{dt}x = (A + BK)x + Bv \tag{2}$$

を考える．このとき (1) が可制御であることと (2) が可制御であることは等価であることを示せ．

(ii) 状態方程式 (1) において，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $B \neq 0$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ とする．ただし n は適当な正整数である．このとき

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

を満たす λ, x_0, u_0 を考える．$K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ を $Kx_0 = u_0$ を満たすように選べることを示せ．さらにそのとき線形システム (1) を初期条件 $x(0) = x_0$，入力を $u(t) = Kx(t)$ として駆動すれば，任意の $t \geq 0$ について $y(t) = 0$ であることを示せ．

以下 (iii),(iv) については，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

として答えよ．

(iii) (4) で与える A, B, C に関して (3) を満たす λ, x_0, u_0 を求めよ．

(iv) 行列 K を

$$K = \begin{bmatrix} -5 & -4.5 & 4 \end{bmatrix}$$

とし，線形システム (1) に対して入力を状態フィードバック $u(t) = Kx(t)$ で与える．このとき閉ループ系の固有値を求めよ．任意の $x(0)$ について $t \to \infty$ のとき $y(t) \to 0$ であることを示せ．

物理統計学

$\boxed{5}$ 平衡統計力学, 確率過程のどちらか一方を選択せよ.

平衡統計力学

N 個の相互作用しない, 静止した原子（互いに区別できるとする）からなる体系を考える. 各原子は 2 状態をとり, 各々のエネルギーを $0, \epsilon(>0)$ とし, 体系のエネルギーを E とする. ボルツマン定数を 1 とし, 以下の問いに答えよ.

(i) E/N の最大値を求めよ.
(ii) 体系が温度 T で熱平衡状態にあるとき, $<E>/N$ を T の関数として与え, その最大値は 0.5ϵ になることを示せ. ただし $<...>$ は熱（カノニカル）平均を意味する.
(iii) (ii) と同様の状況のもとで, 体系のエントロピー S が

$S = -N\{y\ln y + (1-y)\ln(1-y)\}$,
で与えられることを示せ. ただし, $y = \exp(-\epsilon/T)/(1+\exp(-\epsilon/T))$.

確率過程

確率過程 $X(t)$ は a か b の二つの値をとり, 単位時間当たり確率 $\lambda(\mu)$ で a から b(b から a) へ遷移するとする. $p(x,t|y)$ を $X(t=0)=y$ のときに $X(t)=x$ となる条件付き確率を表すとして, 以下の問いに答えよ.

(i) $p(a,t|y)$ を支配する微分方程式を導け.
(ii) (i) で導いた微分方程式を解き, $t\to\infty$ で実現される定常分布 $p_{st}(x)(x=a,b)$ を求めよ.
(iii) $X(t)$ の期待値 $<X(t)|y>$ を $<X(t)|y> \equiv \ {}_{x=a,b}\, xp(x,t|y)$ で定義するとき, 定常状態での $X(t)$ の時間相関関数 $\phi(t) = \lim_{s\to\infty} <X(t+s)X(s)|y>$ を $<X(t)|x>$ および $p_{st}(x)$ を用いて表せ.
(iv) $\phi(t)$ を求めよ.

力学系数学

6

$I = [a, b]$ を有界閉区間とする $(a < b)$. I における r 回連続的微分可能な関数の全体を $C^r(I)$ で表す. ただし, $r = 0, 1, 2, \cdots$. 特に, $r = 0$ のときには, $C^0(I)$ を単に $C(I)$ と書く. いま, $u \in C^2(I)$ に対して,

$$L[u] = \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u$$

で微分作用素 L を定義する. ただし, $q \in C(I)$, $p \in C^1(I)$ かつ $p(x) > 0$ $(x \in I)$. ここで, $u, v \in C^2(I)$ に対し

$$\int_a^b \Big(uL[v] - vL[u]\Big)dx \qquad (*)$$

を考える. 次の (i) に答えよ.

(i) $(*)$ は u, v, u', v' の境界値 $(x = a, b$ での値$)$ だけに依存することを示せ.

いま, 写像 $C^2(I) \to \mathbf{R}^4$ を, $w \in C^2(I)$ に対して

$$w \mapsto \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w(a) \\ w'(a) \\ w(b) \\ w'(b) \end{pmatrix}$$

で定義すると, この写像は明らかに全射である. このとき, $(*)$ は $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ の双１次形式 $\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ の形に書ける. 以下の (ii), (iii) に答えよ.

(ii) $\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ を示せ.

(iii) すべての $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^4$ に対して $\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ ならば, $\boldsymbol{v} = 0$ となることを示せ.

x_j, $j = 1, 2, 3, 4$, を $\mathbf{R}^4$ のデカルト座標とする. $\mathbf{R}^4$ の２次元線形部分空間 E を

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0, \quad \mu_1 x_3 + \mu_2 x_4 = 0, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0), \quad (\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0) \qquad (**)$$

で定義する. 以下の (iv), (v) に答えよ.

(iv) すべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$ に対して, $\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ の成り立つことを示せ.

(v) 特に, $p(a) = p(b)$ のとき, $(**)$ 以外に, $\mathbf{R}^4$ の２次元線形部分空間 E' で, すべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E'$ に対し $\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となるような E' の例を与えよ.