基礎数学 I

1

$a_k \neq 0$ なる実数列 a_k, $(k = 1, 2, \ldots)$ に対して積

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$$

を考える．$n \to \infty$ で p_n が 0 でない有限な値 p に収束するとき，無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ は極限値 p に収束するという．以下の問いに答えよ．

(i) 無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するとき極限 $\lim_{k\to\infty} a_k$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 1$$

であることを示せ．

(ii) $b_k > -1$ なる実数列 b_k, $(k = 1, 2, \ldots)$ に対して無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + b_k)$ を考える．無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + b_k)$ が収束するならば，無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + b_k)$ も収束することを示せ，さらに，この逆も成り立つことを示せ．

(iii) $c_k \geq 0$ なる実数列 c_k, $(k = 1, 2, \ldots)$ に対して無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + c_k)$ を考える．正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ が収束するならば，無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + c_k)$ も収束することを示せ，さらに，この逆も成り立つことを示せ．

(iv) 数列

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad a_{2k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

に対して無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ と無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k)$ の収束，発散を調べよ．(収束する場合も極限は求めなくてよい.)