線形計画

$\boxed{3}$

次の線形計画問題 P を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{P:} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + k x_{n+1} \\
& \text{subject to} & a_i \leq x_i + x_{n+1} \ \ (i = 1, 2, \ldots, n) \\
& & x_i \geq 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n+1)
\end{array}
$$

ただし，$k, a_1, a_2, \ldots, a_n$ は定数であり，$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ は決定変数である．

問題 P の双対問題 D は次のように書ける．

$$
\begin{array}{lll}
\text{D:} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \leq k \\
& & 0 \leq y_i \leq 1 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}
$$

k を n 以下の自然数とし，$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ とする．次の問 (i)-(iii) に答えよ．

(i) 双対問題 D の最適解を求めよ．

(ii) 問題 P の任意の最適解 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ と問題 D の任意の最適解 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して次式が成り立つことを双対定理を用いて示せ．

$$(1 - y_i) x_i = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$y_i (x_i + x_{n+1} - a_i) = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(iii) 問題 P は $x_{n+1}^* = a_k$ となる最適解 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+1}^*)$ を持つ．そのような最適解における x_i^* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を求めよ．