

基礎数学 II

6

m 次複素正方行列 $A = (a_{ij})$, n 次複素正方行列 $B = (b_{kl})$, $m \times n$ 複素行列 $C = (c_{il})$ が与えられたとき, $m \times n$ 複素行列 $X = (x_{il})$ に対する方程式

$$AX - XB = C$$

を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (i) 行列 A と行列 B がそれぞれ上三角行列の場合, 任意の $i = 1, 2, \dots, m$ と $k = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{ii} \neq b_{kk}$ が成立するならば, 行列 X が一意に定まることを示せ.
- (ii) 一般に, 行列 A と行列 B が共通の固有値をもたないならば, 行列 X は一意に定まることを示せ. ここで, 適当な正則行列 U, V が存在して, $UAU^{-1}, VB^{-1}V$ がそれぞれ上三角行列になるという事実を用いてよい.
- (iii) $m = n$ とする. 行列 A を対角化可能, 行列 C をエルミート行列とし,

$$B = -A^*$$

と選ぶ. このとき, 行列 X が一意に定まる場合, $X = X^*$ であることを示せ. ここで, A^* と X^* はそれぞれ行列 A と X のエルミート共役を表す.