応用数学

$\boxed{1}$

実数 t の関数 $f,\ g$ を有界かつ絶対可積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty$$

とし，f と g のたたみこみ $(f * g)(t)$ を

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

1. 閉区間 I を台とする関数 $S_I(t)$ を

   $$S_I(t) = \begin{cases} 1 & (t \in I) \\ 0 & (t \notin I) \end{cases}$$

   で定義する．a を定数とし，閉区間 I,J を

   $$I = [0, 1], \quad J = [a, a+1]$$

   とする．このとき，S_I と S_J のたたみこみ $(S_I * S_J)(t)$ を求め，これが連続関数となることを確かめよ．

2. 関数 $f * g$ が有界かつ絶対可積分となることを示せ．

3. 関数 $f * g$ が連続関数となることを示せ．ここで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な階段関数 F_δ, G_δ が存在して

   $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - F_\delta(t)|dt < \varepsilon, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t) - G_\delta(t)|dt < \varepsilon$$

   が成立することを用いてよい．ただし，F_δ, G_δ は定数 δ と，f または g から決まる a_k $(k \in \mathbb{Z})$ とを用いて，

   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k S_{[k\delta, k\delta+\delta]}(t)$$

   の形に表される．