# グラフ理論

## 2

ネットワーク $N = (G = (V, E), s, t, \ell, c)$ を有向グラフ $G$，ソース $s \in V$，シンク $t \in V$，枝のフロー下限値 $\ell(e) \geq 0,\ e \in E$, 枝のフロー上限値 $c(e) \geq 0,\ e \in E$ の組と定義する．ただし，$V$, $E$ はそれぞれ $G$ の節点集合，枝集合を表す．ここで，$G$ において節点 $v$ から出る有向枝の集合，節点 $v$ に入る有向枝の集合をそれぞれ $E^+(v)$, $E^-(v)$ で表し，$N$ に対する $st$-フロー $x$ を次の流量保存則を満たす非負実数 $x(e) \geq 0$, $e \in E$ と定義し，その流量を $\sum_{e \in E^+(s)} x(e) - \sum_{e \in E^-(s)} x(e)$ で定める．

[流量保存則] $$\sum_{e \in E^+(v)} x(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x(e) = 0, \quad v \in V - \{s, t\}$$

$st$-フロー $x$ に対して以下の上限，下限制約を考える．

[上限制約] $x(e) \leq c(e), \quad e \in E,$

[下限制約] $\ell(e) \leq x(e), \quad e \in E$

節点 $u$ から節点 $v$ へ向かう有向枝を $(u, v)$ と書き，そのフロー下限値, フロー上限値をそれぞれ $\ell(u, v)$, $c(u, v)$ とも書く．一般に，上限制約のみを満たす $st$-フローで流量を最大にするものは，フロー増加路に基づくアルゴリズム（これをアルゴリズム A と呼ぶ）により求めることができる．以下の問いに答えよ．

(i) この問 (i) では，$N$ において，ある 1 本の枝 $e_1 = (u_1, v_1)$ を除き，$\ell(e) = 0,\ e \in E - \{e_1\}$ が成り立っているものとし，$N$ から以下の手順でネットワーク $N' = (G', a, b, \ell', c')$ を構成する．$G$ に新しい節点 $a, b$ と新しい枝 $(a, v_1)$, $(u_1, b)$, $(t, s)$ を付け加えた有向グラフを $G'$ とする．$G'$ のフロー下限値 $\ell'$ はすべての枝で 0 とし, $G'$ のフロー上限値 $c'$ を次のように定める．

$$c'(a, v_1) = c'(u_1, b) = \ell(e_1), \quad c'(t, s) = \textstyle\sum_{e \in E} c(e), \quad c'(e_1) = c(e_1) - \ell(e_1),$$

$$c'(e) = c(e),\ e \in E - \{e_1\}.$$

このとき，$N$ が上下限制約を満たす $st$-フローをもつための必要十分条件を $N'$ における $ab$-フローを用いて与えよ．

(ii) 一般に $N$ が上下限制約を満たす $st$-フローをもつかどうかをアルゴリズム A を適用して判定する方法を示せ．

(iii) 与えられた $N$ に対し上下限制約を満たす $st$-フローで流量を最大にするものを求めたい．アルゴリズム A を適用してこれを計算する方法を示せ．