オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

(i) $g : R^n \to R$ を微分可能な凸関数とする．以下の問 (a), (b) に答えよ．

(a) 点 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ における関数 g の勾配を $\nabla g(\mathbf{0})$ と表す．次の不等式がすべての $\boldsymbol{x} \in R^n$ に対して成り立つことを示せ．

$$g(\boldsymbol{x}) \geq g(\mathbf{0}) + \nabla g(\mathbf{0})^\top \boldsymbol{x}$$

ここで $^\top$ は転置記号を表す．

(b) 関数 $h : R^n \to R$ を次式で定義する．

$$h(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{x}\|^2$$

ただし $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ のユークリッドノルムを表す．集合 $S = \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid h(\boldsymbol{x}) \leq h(\mathbf{0})\}$ は有界であることを示せ．

(ii) 次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}): & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}$$

ここで $f : R^n \to R$ と $c_i : R^n \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ は連続的微分可能とし，制約条件の添字集合を $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, m\}$ とする．点 $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ を問題 (P) の局所的最適解とし，点 $\boldsymbol{x}^*$ と Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_i^* \, ; \, i \in \mathcal{I})$ のペア $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ は問題 (P) の Karush-Kuhn-Tucker 条件 (KKT 条件) を満たすものとする．さらに，添字集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ を $\mathcal{A} = \{i \mid \lambda_i^* \neq 0\}$ で定義し，次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{Q}): & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (i \in \mathcal{A}) \end{array}$$

次の (A), (B) の各々に対して，その命題が真であれば証明し，偽であれば反例を一つ与えよ．

(A) ある Lagrange 乗数 $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{\lambda}_i \, ; \, i \in \mathcal{A})$ が存在して，$(\boldsymbol{x}^*, \hat{\boldsymbol{\lambda}})$ は問題 (Q) に対する KKT 条件を満たす．

(B) 点 $\boldsymbol{x}^*$ は問題 (Q) の局所的最適解である．