

現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (1)$$

で記述される線形システムについて以下の問いに答えよ。ただし u は入力, y は出力, x は状態であり, A, B, C は適当なサイズの行列である。

(i) 状態方程式 (1) において, $u = Kx + v$ として, 新しい入力 v をもった線形システム

$$\frac{d}{dt}x = (A + BK)x + Bv \quad (2)$$

を考える。このとき (1) が可制御であることと (2) が可制御であることは等価であることを示せ。

(ii) 状態方程式 (1) において, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $B \neq 0$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ とする。ただし n は適当な正整数である。このとき

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

を満たす λ, x_0, u_0 を考える。 $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ を $Kx_0 = u_0$ を満たすように選べることを示せ。さらにそのとき線形システム (1) を初期条件 $x(0) = x_0$, 入力を $u(t) = Kx(t)$ として駆動すれば, 任意の $t \geq 0$ について $y(t) = 0$ であることを示せ。

以下 (iii), (iv) については,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1 \quad -1] \quad (4)$$

として答えよ。

(iii) (4) で与える A, B, C に関して (3) を満たす λ, x_0, u_0 を求めよ。

(iv) 行列 K を

$$K = [-5 \quad -4.5 \quad 4]$$

とし, 線形システム (1) に対して入力を状態フィードバック $u(t) = Kx(t)$ で与える。このとき閉ループ系の固有値を求めよ。任意の $x(0)$ について $t \rightarrow \infty$ のとき $y(t) \rightarrow 0$ であることを示せ。